HANDBOUND
AT THE
UNIVERSITY OF

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s5journaldemat06liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

33

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

50221
1901

TOME SIXIÈME. — ANNÉE 1900.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

(Tous droits réservés.)

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique;

PAR M. PAUL APPELL.

Nous avons, dans un court Travail inséré au *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXI, indiqué une forme nouvelle des équations de la Dynamique présentant les deux avantages suivants, qui la rendent plus générale que la forme donnée par Lagrange : 1° ces équations sont applicables à tous les genres de liaisons, même aux liaisons qui, comme les roulements, s'expriment par des relations différentielles non intégrables; 2° elles s'appliquent encore quand, au lieu de définir la position d'un système par de véritables coordonnées, on emploie des paramètres liés aux coordonnées par des relations différentielles non intégrables (¹). Nous nous pro-

(¹) *Voyez* un opuscule intitulé : *Les mouvements de roulement en Dynamique*, que nous avons publié en 1899, chez Carré et Naud (Collection *Scientia*). On doit ajouter à la bibliographie placée en tête de cet Opuscule un article de FERRERS (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1871-1873).

posons, dans le présent Mémoire, de développer des applications de cette théorie. Nous commencerons par rappeler rapidement comment on obtient les nouvelles équations.

I. Imaginons un système matériel assujetti à deux sortes de liaisons, A et B.

A. Soient d'abord des liaisons exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points : en vertu de ces liaisons, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque m du système peuvent être exprimées en fonction de h paramètres indépendants q_1, q_2, ..., q_h et du temps t :

$$\begin{aligned} x &= f(q_1, q_2, \ldots, q_h, t), \\ y &= \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_h, t), \\ z &= \psi(q_1, q_2, \ldots, q_h, t). \end{aligned}$$

Un déplacement virtuel, compatible avec ces liaisons, est défini par les relations

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_h}\delta q_h, \\ \delta y &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\delta q_h, \\ \delta z &= \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_h}\delta q_h, \end{aligned} \right.$$

et le déplacement réel pendant le temps dt est défini par les relations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial f}{\partial t}dt, \\ dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt, \\ dz &= \frac{\partial \psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial \psi}{\partial t}dt. \end{aligned} \right.$$

Si ces liaisons existaient seules, le système serait ce que Hertz appelle, dans le troisième volume de ses Œuvres, *un système holonome*.

B. Supposons maintenant qu'entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_h$, qui sont de véritables coordonnées, et d'autres paramètres $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$, au nombre de s, on établisse des relations différentielles non intégrables au nombre de $p - s$, que nous écrirons comme il suit. Les variations virtuelles $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{h+s}$ des anciens et nouveaux paramètres doivent être liées par p relations de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{11}\,\delta q_1 + A_{12}\,\delta q_2 + \ldots + A_{1h+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \\ A_{21}\,\delta q_1 + A_{22}\,\delta q_2 + \ldots + A_{2h+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{p1}\,\delta q_1 + A_{p2}\,\delta q_2 + \ldots + A_{ph+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \end{array}\right.$$

et les variations réelles des mêmes paramètres, pendant l'intervalle de temps dt, doivent être liées par les p relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{11}\,dq_1 + A_{12}\,dq_2 + \ldots + A_{1h+s}\,dq_{h+s} + A_1\,dt = 0, \\ A_{21}\,dq_1 + A_{22}\,dq_2 + \ldots + A_{2h+s}\,dq_{h+s} + A_2\,dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p1}\,dq_1 + A_{p2}\,dq_2 + \ldots + A_{ph+s}\,dq_{h+s} + A_p\,dt = 0. \end{array}\right.$$

Dans ces relations, les coefficients A_{ij}, A_i sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_{h+s}, t$. Si ces p relations (3) et (4) sont exactement au nombre des nouveaux paramètres introduits $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$ ($p = s$), elles doivent être considérées comme servant de définition aux nouveaux paramètres introduits et n'imposent aucune liaison nouvelle au système; si le nombre p des relations (3) et (4) est supérieur à s, ces relations servent de définition aux nouveaux paramètres et, en même temps, imposent au système $p - s$ liaisons nouvelles, puisque, par l'élimination de $\delta q_{h+1}, \delta q_{h+2}, \ldots, \delta q_{h+s}$ entre les p relations (3), on obtiendrait alors $p - s$ relations entre $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_h$. Comme une au moins de ces h variations doit être arbitraire, $p - s$ est au plus égal à $h - 1$.

Il peut se faire, bien entendu, qu'il n'y ait pas intérêt à introduire de nouveaux paramètres autres que $q_1, q_2, \ldots, q_h$; alors $s = 0$.

2. *Exemple.* — Pour montrer sur un exemple simple comment il

faut comprendre l'introduction de ces nouvelles liaisons et de ces nouveaux paramètres, considérons une sphère solide homogène de rayon a assujettie d'abord à toucher un plan fixe $\xi O \eta$. La position de cette sphère dépend de cinq paramètres qui sont les coordonnées ξ et η de son centre de gravité G et les trois angles d'Euler, θ, φ, ψ, que font des axes Gx, y, z invariablement liés à la sphère avec trois axes Gx_1, y_1, z_1, parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$. Le ζ du point G est constant et égal à a. Ces cinq paramètres sont de véritables coordonnées dont les valeurs numériques déterminent la position de la sphère; ils jouent le rôle de $q_1, q_2, \ldots, q_h$.

Désignons par p_1, q_1, r_1 les composantes de la rotation instantanée de la sphère suivant les axes Gx_1, y_1, z_1; on a, d'après des formules connues (voyez mon *Traité de Mécanique*, t. II, p. 257),

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi, \\ q_1 &= \theta' \sin\psi - \varphi' \sin\theta \cos\psi, \\ r_1 &= \psi' + \varphi' \cos\theta. \end{aligned}$$

Cela posé, assujettissons la sphère à rouler sur le plan; cette condition s'exprime en écrivant que la vitesse du point matériel de la sphère qui touche le plan est nulle

$$\frac{d\xi}{dt} - aq_1 = 0, \qquad \frac{d\eta}{dt} + ap_1 = 0;$$

en même temps, introduisons trois nouveaux paramètres λ, μ, ν, dont les variations réelles, pendant le temps dt, sont définies par

$$d\lambda = p_1\,dt, \qquad d\mu = q_1\,dt, \qquad d\nu = r_1\,dt.$$

Nous aurons, d'après les valeurs de p_1, q_1, r_1 les cinq équations suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} d\lambda - d\theta \cos\psi - d\varphi \sin\theta \sin\psi &= 0, \\ d\mu - d\theta \sin\psi + d\varphi \sin\theta \cos\psi &= 0, \\ d\nu - d\psi - d\varphi \cos\theta &= 0, \\ d\xi - a\,d\mu &= 0, \\ d\eta + a\,d\lambda &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont trois servent de définition aux trois nouveaux paramètres et les deux autres aux nouvelles liaisons. Les variations virtuelles des anciens et des nouveaux paramètres seront, de même, liées par les cinq relations

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\lambda - \delta\theta \cos\psi - \delta\varphi \sin\theta \sin\psi &= 0, \\ \delta\mu - \delta\theta \sin\psi + \delta\varphi \sin\theta \cos\psi &= 0, \\ \delta\nu - \delta\psi - \delta\varphi \cos\theta &= 0, \\ \delta\xi - a\,\delta\mu &= 0, \\ \delta\eta + a\,\delta\lambda &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations jouent, dans cet exemple, le rôle des relations (3) et (4). Les paramètres λ, μ, ν jouent le rôle de $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$. Les nombres h, s et p sont respectivement 5, 3 et 5.

Revenons maintenant à la théorie générale.

5. Pour obtenir les équations du mouvement, désignons par n la différence positive

$$n = h + s - p.$$

Les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{h+s}$, au nombre de $n + p$, étant liées par les p relations linéaires et homogènes (3), on peut regarder n d'entre elles comme arbitraires et les p autres comme des fonctions de celles-là, définies par les relations (3).

Ces variations arbitraires peuvent être choisies aussi bien parmi les variations des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_h$ que parmi les variations des nouveaux paramètres $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$.

Pour fixer les idées, nous regarderons $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ comme arbitraires; nous aurons alors, en résolvant les équations (3) par rapport à $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \ldots, \delta q_{n+p}$, $(n + p = h + s)$,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta q_{n+1} &= \alpha_1 \delta q_1 + \alpha_2 \delta q_2 + \ldots + \alpha_n \delta q_n, \\ \delta q_{n+2} &= \beta_1 \delta q_1 + \beta_2 \delta q_2 + \ldots + \beta_n \delta q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta q_{n+p} &= \lambda_1 \delta q_1 + \lambda_2 \delta q_2 + \ldots + \lambda_n \delta q_n; \end{aligned} \right.$$

les équations (4) résolues par rapport à $dq_{n+1}, dq_{n+2}, \ldots, dq_{n+p}$ donnent de même

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} dq_{n+1} = \alpha_1 dq_1 + \alpha_2 dq_2 + \ldots + \alpha_n dq_n + \alpha\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dq_{n+p} = \lambda_1 dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \ldots + \lambda_n dq_n + \lambda\, dt. \end{array}\right.$$

Ceci posé, le principe de d'Alembert, combiné avec le théorème du travail virtuel, donne pour l'équation générale du mouvement du système

$$(7)\quad \sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Dans cette équation, m désigne la masse du point de coordonnées x, y, z; x'', y'', z'' les dérivées totales deuxièmes de x, y, z par rapport au temps; X, Y, Z les projections de la force appliquée au point x, y, z. Les déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ sont les déplacements compatibles avec les liaisons à l'instant t. Si les liaisons ont lieu *sans frottement*, les forces de liaison s'éliminent dans la relation (7), car, sous cette réserve, les travaux des forces de liaison ont une somme nulle pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

Les expressions de $\delta x, \delta y, \delta z$ sont fournies par les relations (1), où les $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_h$ vérifient les équations (3). En remplaçant $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \ldots, \delta q_{n+p}$ par leurs expressions (5), on a, pour $\delta x, \delta y, \delta z$, des expressions de la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta x = a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \ldots + a_n \delta q_n, \\ \delta y = b_1 \delta q_1 + b_2 \delta q_2 + \ldots + b_n \delta q_n, \\ \delta z = c_1 \delta q_1 + c_2 \delta q_2 + \ldots + c_n \delta q_n. \end{array}\right.$$

De même, en remplaçant dans les expressions de dx, dy, dz les quantités $dq_{n+1}, dq_{n+2}, \ldots, dq_{n+p}$ par leurs valeurs (6), on a, pour le déplacement réel,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} dx = a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \ldots + a_n dq_n + a\, dt, \\ dy = b_1 dq_1 + b_2 dq_2 + \ldots + b_n dq_n + b\, dt, \\ dz = c_1 dq_1 + c_2 dq_2 + \ldots + c_n dq_n + c\, dt, \end{array}\right.$$

où

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad a, \qquad \ldots, \qquad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad c$$

sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et t.

Ceci posé, en remplaçant dans l'équation (7) $\delta x, \delta y, \delta z$ par leurs expressions (8), on a une équation de la forme

$$P_1 \delta q_1 + P_2 \delta q_2 + \ldots + P_n \delta q_n = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n,$$

qui doit avoir lieu quels que soient $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$; elle se décompose donc en n équations

$$(10) \qquad P_1 = Q_1, \qquad P_2 = Q_2, \qquad \ldots, \qquad P_n = Q_n,$$

qui, jointes aux p équations (6), définissent les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ en fonction de t. Dans ces équations, les deuxièmes membres se calculent comme dans les équations de Lagrange

$$Q_1 = \Sigma (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z), \qquad \ldots.$$

Quant aux premiers membres, on peut les calculer comme il suit. Prenons P_1. On a

$$P_1 = \Sigma m (x'' a_1 + y'' b_1 + z'' c_1);$$

or les expressions (9) s'écrivent en divisant par dt et désignant par $x', y', z', q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ les dérivées de $x, y, z, q_1, q_2, \ldots, q_n$ par rapport à t

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = a_1 q'_1 + a_2 q'_2 + \ldots + a_n q'_n + a, \\ y' = b_1 q'_1 + b_2 q'_2 + \ldots + b_n q'_n + b, \\ z' = c_1 q'_1 + c_2 q'_2 + \ldots + c_n q'_n + c; \end{cases}$$

prenons les dérivées totales de ces expressions par rapport au temps; nous aurons

$$(12) \begin{cases} x'' = a_1 q''_1 + a_2 q''_2 + \ldots + a_n q''_n + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial a_1}{\partial q_{n+p}} q'_{n+p} + \frac{\partial a_1}{\partial t}\right) q'_1 + \ldots \\ y'' = b_1 q''_1 + b_2 q''_2 + \ldots + b_n q''_n + \ldots, \\ z'' = c_1 q''_1 + c_2 q''_2 + \ldots + c_n q''_n + \ldots; \end{cases}$$

mais alors on a évidemment

$$a_1 = \frac{\partial x''}{\partial q''_1}, \qquad b_1 = \frac{\partial y''}{\partial q''_1}, \qquad c_1 = \frac{\partial z''}{\partial q''_1}.$$

L'expression de P_1 s'écrit donc

$$P_1 = \sum m \left(x'' \frac{\partial x''}{\partial q''_1} + y'' \frac{\partial y''}{\partial q''_1} + z'' \frac{\partial z''}{\partial q''_1} \right),$$

et en posant

$$S = \frac{1}{2} \sum m (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

on a

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q''_1}.$$

On obtient de même $P_2, \ldots, P_n$ et les équations du mouvement sont finalement

$$(13) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_2} = Q_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_n} = Q_n.$$

Telle est la forme d'équations que nous avions en vue. Pour écrire ces équations, il faut calculer les fonctions

$$S = \frac{1}{2} \sum m J^2,$$

où J est l'accélération absolue du point m, fonction qui est composée avec les accélérations comme la demi-force vive l'est avec les vitesses. Il faut exprimer cette fonction S à l'aide des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et de leurs dérivées premières et deuxièmes, en ayant soin de ne laisser subsister dans la fonction que les dérivées deuxièmes $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ des paramètres regardés comme indépendants; cela est toujours possible, car à l'aide des relations (6) on peut toujours exprimer, par dérivation, $q''_{n+1}, q''_{n+2}, \ldots, q''_{n+p}$ en fonction linéaire de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$. La fonction S étant ainsi calculée, on écrit les n équations (13) qui, jointes aux p relations (6), déterminent les $n+p$ paramètres

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n+p},$$

en fonction de t.

La fonction S est du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. Il suffit évidemment de calculer dans S les termes contenant les dérivées secondes des paramètres, car les autres ne donnent rien quand on prend les dérivées partielles par rapport à $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$.

On peut remarquer, d'après les formules (11) et (12), que si l'on forme la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

les coefficients des termes du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ dans T sont identiques aux coefficients des termes du deuxième degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ dans S. Dans cette fonction S, les coefficients des termes du deuxième degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ dépendent des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et du temps; ceux des termes du premier degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ contiennent en outre, au second degré, les dérivées premières $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n+p}$.

4. *Application au mouvement plan d'un point matériel en coordonnées polaires.* — Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point (x, y) de masse m. On a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2) = \frac{m}{2}[(r'' - r\theta'^2)^2 + (r\theta'' + 2r'\theta')^2].$$

En appelant P la composante de la force appliquée X, Y, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur et R sa composante, suivant le rayon vecteur, on voit immédiatement que le travail virtuel

$$X\delta x + Y\delta y$$

de la force est

$$Pr\delta\theta + R\delta r.$$

Les équations de mouvement sont donc

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} = Pr, \qquad \frac{\partial S}{\partial r''} = R,$$

ou

$$mr(r\theta'' + 2r'\theta') = \mathrm{P}r, \qquad m(r'' - r\theta'^2) = \mathrm{R}.$$

Remarque. — Dans S, la quantité

$$r\theta'' + 2r'\theta'$$

admet un facteur intégrant r. Introduisons alors, à la place de θ, un paramètre λ dont la variation réelle est définie par

$$d\lambda = r^2\, d\theta$$

et la variation virtuelle par

$$\delta\lambda = r^2\, \delta\theta.$$

Nous aurons

$$\lambda' = r^2\theta', \qquad \lambda'' = r(r\theta'' + 2r'\theta');$$

donc

$$\mathrm{S} = \frac{m}{2}\left[(r'' - r\theta'^2)^2 + \frac{1}{r^2}\lambda''^2\right],$$

$$\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y = \frac{\mathrm{P}}{r}\,\delta\lambda + \mathrm{R}\,\delta r,$$

et les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial r''} = \mathrm{R}, \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda''} = \frac{\mathrm{P}}{r};$$

la seconde est

$$m\lambda'' = \mathrm{P}r.$$

Si P est nul, λ' est constant, ce qui donne le théorème des aires.

5. **Systèmes.** — Théorème analogue au théorème de Kœnig. — Soient, dans un système, x, y, z les coordonnées absolues d'un point m, ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives du même point, par rapport à des axes $\mathrm{G}x_1, y_1, z_1$, parallèles aux axes fixes et menés par G. Appelons J_0 l'accélération absolue du point G

$$\mathrm{J}_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2,$$

J_1 l'accélération relative du point m, par rapport aux axes G, x_1, y_1, z_1

$$J_1^2 = x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2.$$

Désignons enfin par M la masse totale du système. On a

$$x = \xi + x_1, \qquad y = \eta + y_1, \qquad z = \zeta + z_1,$$
$$x'' = \xi'' + x_1'', \qquad y'' = \eta'' + y_1'', \qquad z'' = \zeta'' + z_1''.$$

Calculons alors la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2 = \frac{1}{2}\Sigma m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

en remarquant que,

$$\Sigma m x_1, \quad \Sigma m y_1, \quad \Sigma m z_1$$

étant nuls, on a aussi

$$\Sigma m x_1'' = \Sigma m y_1'' = \Sigma m z_1'' = 0;$$

nous avons

$$S = \frac{1}{2} M J_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma m J_1^2,$$

ce que nous écrirons

$$(14) \qquad S = \frac{1}{2} M J_0^2 + S_1.$$

On a ainsi un théorème analogue au théorème de Kœnig pour la force vive.

6. *Application à un corps solide qui se meut parallèlement à un plan fixe.* — Prenons comme plan de la figure le plan de la courbe décrite par le centre de gravité. Soient, dans ce plan, deux axes fixes Ox et Oy, ξ et η les coordonnées de G. Il suffit évidemment de connaître le mouvement de la figure plane (P), section du corps par le plan xOy. Appelons alors θ l'angle que fait avec Ox un rayon GA invariablement lié à cette figure plane (P), et Mk^2 le moment d'inertie

du corps par rapport à l'axe mené par G perpendiculairement au plan xOy.

Le mouvement du corps autour du centre de gravité G est une rotation autour d'un axe fixe dans le corps, la vitesse angulaire de rotation étant θ'. On a donc, pour la fonction S_1 calculée dans le mouvement du corps autour de G

$$S_1 = \frac{Mk^2}{2}(\theta'^2 + \theta'^4).$$

Donc

$$S = \frac{M}{2}[\xi'^2 + \eta'^2 + k^2\theta'^2 + \ldots],$$

où il est inutile d'écrire les termes ne contenant pas les dérivées secondes.

D'autre part, si l'on appelle X_0, Y_0 les projections de la résultante générale des forces appliquées, et N_0 la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe mené par G perpendiculairement au plan xOy, on a

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = X_0\delta\xi + Y_0\delta\eta + N_0\delta\theta.$$

Le corps n'étant supposé soumis à aucune autre liaison, les paramètres ξ, η, θ sont indépendants et les équations de mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \xi'} = X_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \eta'} = Y_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta'} = N_0,$$

$$M\xi'' = X_0, \qquad M\eta'' = Y_0, \qquad Mk^2\theta'' = N_0.$$

On retrouve ainsi les équations que donnent immédiatement les théorèmes généraux.

Supposons que le corps soit assujetti à une nouvelle liaison, que cette liaison soit exprimée par une relation en termes finis

$$f(\xi, \eta, \theta, t) = 0,$$

ou par une relation différentielle

$$A\,d\xi + B\,d\eta + C\,d\theta + D\,dt = 0,$$

$$A\,\delta\xi + B\,\delta\eta + C\,\delta\theta \qquad = 0,$$

A, B, C, D étant des fonctions de ξ, η, θ, t. On pourra alors exprimer η'' en fonction de ξ'' et θ'' par exemple, $\delta\eta$ en fonction de $\delta\xi$ et $\delta\theta$; par suite, calculer S en fonction de ξ'' et θ'', rendre $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ linéaire et homogène en $\delta\xi$ et $\delta\theta$, puis égaler $\frac{\partial S}{\partial \xi''}$ au coefficient de $\delta\xi$ et $\frac{\partial S}{\partial \theta''}$ à celui de $\delta\theta$.

7. *Application à un corps solide mobile autour d'un point fixe.* — Commençons par calculer la fonction S pour un corps solide mobile autour d'un point fixe O, en nous plaçant dans le cas le plus général. Il suffira ensuite pour chaque exemple particulier, d'employer cette fonction S calculée une fois pour toutes.

Rapportons le mouvement du corps à un trièdre trirectangle $Oxyz$, d'origine O, animé d'un mouvement connu. Soient Ω la rotation instantanée de ce trièdre, P, Q, R les composantes de cette rotation suivant les arêtes Ox, Oy, Oz; soient de même ω la rotation instantanée absolue du corps solide, p, q, r ses composantes suivant les axes $Oxyz$. Une molécule m du corps de coordonnées x, y, z possède une vitesse absolue v de projections

$$(15)\qquad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx; \end{cases}$$

cette molécule possède une accélération absolue J ayant pour projections

$$(16)\qquad \begin{cases} J_x = \frac{dv_x}{dt} + Qv_z - Rv_y, \\ J_y = \frac{dv_y}{dt} + Rv_x - Pv_z, \\ J_z = \frac{dv_z}{dt} + Pv_y - Qv_x; \end{cases}$$

ces formules s'écrivent immédiatement si l'on remarque que l'accélération J est la vitesse absolue du point géométrique ayant pour coordonnées v_x, v_y, v_z par rapport aux axes mobiles $Oxyz$.

Cela posé, on a

$$\frac{dv_x}{dt} = q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt} + zq' - yr', \ldots,$$

p', q', r' désignant les dérivées de p, q, r par rapport au temps. Les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les projections sur Ox, Oy, Oz de la vitesse relative v_r de la molécule m par rapport à ces axes : si l'on appelle v_e la vitesse d'entraînement de cette même molécule, on a

$$(v_r)_x = v_x - (v_e)_x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry - (Qz - Ry).$$

On a de même, en permutant, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$. D'après cela, les expressions (16) de J_x, J_y, J_z prennent la forme suivante, où nous écrivons seulement J_x :

$$\begin{aligned} J_x = {} & q[(p - P)y - (q - Q)x] - r[(r - R)x - (p - P)z] \\ & + zq' - yr' + Q(py - qx) - R(rx - pz), \end{aligned}$$

ou en ordonnant

$$\begin{aligned} J_x = {} & -x(q^2 + r^2) + y[q(p - P) + pQ - r] \\ & + z[r(p - P) + pR + q']. \end{aligned}$$

On a de même, en permutant, J_y et J_z. Faisant la somme des carrés, on a J^2, et enfin la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Dans cette somme figurent comme coefficients les moments d'inertie

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \qquad C = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

et les produits d'inertie

$$D = \Sigma myz, \qquad E = \Sigma mzx, \qquad F = \Sigma mxy,$$

par rapport aux axes $Oxyz$. Ces six quantités seront, en général, variables avec le temps, puisque les axes $Oxyz$ se déplacent dans le corps.

Actuellement les paramètres sont les angles qui fixent l'orientation du corps autour du point O : les quantités p, q, r contiennent les *dérivées premières* de ces paramètres par rapport au temps; le trièdre $Oxyz$ étant supposé animé d'un mouvement connu, P, Q, R doivent être regardés comme des fonctions connues du temps; les dérivées secondes des paramètres ne figurent donc que dans p', q', r'. Alors, d'après une remarque précédente, il suffit de calculer les termes de S qui dépendent des accélérations, c'est-à-dire de p', q', r', car ces termes seuls dépendent des dérivées secondes des paramètres.

Posons, pour abréger,

$$(17) \quad qR - rQ = P_1, \qquad rP - pR = Q_1, \qquad pQ - qP = R_1,$$

et désignons, pour un moment, par a, b, c les sommes Σmx^2, Σmy^2, Σmz^2. On peut écrire

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} 2S = {} & a[(q' - Q_1 - pr)^2 + (r' - R_1 + pq)^2] \\ & + b[(r' - R_1 - qp)^2 + (p' - P_1 + qr)^2] \\ & + c[(p' - P_1 - rq)^2 + (q' - Q_1 + rp)^2] \\ & - 2D[(q^2 - r^2)p' + (q' - Q_1 + pr)(r' - R_1 - pq)] \\ & - 2E[(r^2 - p^2)q' + (r' - R_1 + qp)(p' - P_1 - qr)] \\ & - 2F[(p^2 - q^2)r' + (p' - P_1 + rq)(q' - Q_1 - rp)] + \ldots \end{aligned} \right.$$

Développons et ordonnons par rapport à $p' - P_1$, $q' - Q_1$, $r' - R_1$, en remarquant que

$$b + c = A, \qquad c + a = B, \qquad a + b = C,$$
$$b - c = C - B, \qquad c - a = A - C, \qquad a - b = B - A;$$

nous pouvons écrire, en laissant de côté des termes indépendants de p', q', r'

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & A(p'-P_1)^2 + B(q'-Q_1)^2 + C(r'-R_1)^2 \\ & - 2D(q'-Q_1)(r'-R_1) - 2E(r'-R_1)(p'-P_1) \\ & \qquad\qquad - 2F(p'-P_1)(q'-Q_1) \\ & + 2[(C-B)qr - D(q^2-r^2) - Epq + Fpr](p'-P_1) \\ & + 2[(A-C)rp - E(r^2-p^2) - Fqr + Dqp](q'-Q_1) \\ & + 2[(B-A)pq - F(p^2-q^2) - Drp + Erq](r'-R_1) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette formule peut être écrite d'une façon simple à l'aide de la forme quadratique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} 2S = {} & f(p'-P_1, q'-Q_1, r'-R_1) + (p'-P_1)\left(q\frac{\partial f}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial q}\right) \\ & + (q'-Q_1)\left(r\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial r}\right) + (r'-R_1)\left(p\frac{\partial f}{\partial q} - q\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \ldots. \end{aligned}$$

où $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial r}$ sont les dérivées partielles de $f(p, q, r)$.

Remarque. — Si les axes $Oxyz$ sont *fixes dans l'espace*, on a

$$P = Q = R = 0;$$

par suite $P_1 = Q_1 = R_1 = 0$, la fonction $2S$ est alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & f(p', q', r') + (rq' - qr')\frac{\partial f}{\partial p} + (pr' - rp')\frac{\partial f}{\partial q} \\ & + (qp' - pq')\frac{\partial f}{\partial r} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

La même forme convient encore si les axes sont *fixes dans le corps*, car dans ce cas

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad R = r,$$

et l'on a aussi

$$P_1 = Q_1 = R_1 = 0.$$

On voit que l'on remonte de l'expression (20) de la partie utile de S dans ces deux cas, à celle de la partie utile de S dans le cas général, en y remplaçant p', q', r' par $p' - P_1$, $q' - Q_1$, $r' - R_1$.

Équations générales du mouvement. — Prenons comme paramètres servant à définir la suite des positions du corps les quantités λ, μ, ν, dont les variations pendant le temps dt sont liées à p, q, r par les formules

$$(21) \qquad d\lambda = p\,dt, \qquad d\mu = q\,dt, \qquad d\nu = r\,dt.$$

On voit que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sont les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour de Ox, Oy, Oz pour l'amener de la position actuelle à la position infiniment voisine qu'il occupe à l'instant $t + dt$. Nous appellerons de même $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les variations virtuelles qu'il faudrait donner à λ, μ, ν pour amener le corps de la position actuelle à une position infiniment voisine quelconque.

Dans ces conditions, la somme des travaux virtuels des forces appliquées

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

prend la forme

$$L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu,$$

où L, M, N sont respectivement les sommes des moments des forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz : ainsi L est la somme des moments par rapport à Ox, parce que le déplacement $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$, $\delta\lambda \neq 0$ est une rotation autour de l'axe Ox supposé fixe.

D'autre part, les formules (21) donnent, en employant la notation des dérivées de Lagrange,

$$p = \lambda', \qquad q = \mu', \qquad r = \nu',$$
$$p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''.$$

La fonction S devient alors une forme quadratique de λ'', μ', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N,$$

ou encore

$$(22) \qquad \frac{\partial S}{\partial p'} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = N.$$

La première de ces équations est, d'après (19),

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A(p' - P_1) - F(q' - Q_1) - E(r' - R_1) \\ + (C - B)qr - D(q^2 - r^2) - Epq + Fpr = L. \end{array} \right.$$

Les deux autres s'obtiennent par permutation circulaire.

Remarque. — On verrait que l'introduction des paramètres λ, μ, ν est légitime et conforme à la théorie générale que nous venons d'exposer, en montrant que ces paramètres sont liés aux angles d'Euler par des relations différentielles linéaires non intégrables. C'est ce que nous montrons en détail dans les exemples élémentaires suivants.

8. Première application élémentaire. — *Formules d'Euler.* — Supposons le trièdre $Oxyz$ lié au corps et formé d'axes principaux d'inertie. Alors la rotation instantanée Ω du trièdre est identique à celle du corps ω : on a

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad R = r, \qquad P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0, \qquad R_1 = 0,$$

d'où

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2S = Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + 2(C - B)qrp' \\ \qquad + 2(A - C)rpq' + 2(B - A)pqr' + \ldots. \end{array} \right.$$

La position du corps dépend de trois paramètres, les trois angles d'Euler θ, φ, ψ du trièdre $Oxyz$ avec un trièdre fixe ; on a, d'après des

formules connues [1],

$$(25)\qquad \begin{cases} p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \psi' \cos\theta + \varphi'; \end{cases}$$

en dérivant par rapport au temps et écrivant seulement les termes en θ'', φ'', ψ'', on a de même

$$(26)\qquad \begin{cases} p' = \psi'' \sin\theta \sin\varphi + \theta'' \cos\varphi + \ldots, \\ q' = \psi'' \sin\theta \cos\varphi - \theta'' \sin\varphi + \ldots, \\ r' = \psi'' \cos\theta + \varphi'' + \ldots. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on imprime au corps un déplacement virtuel obtenu en faisant varier θ, φ, ψ de $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, on a, pour la somme des travaux des forces appliquées,

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$(27)\qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = \Theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \Phi, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = \Psi.$$

Écrivons l'équation relative à φ''. Comme r' seul contient φ'', on a évidemment

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \frac{\partial S}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial \varphi''} = Cr' + (B - A)pq,$$

car $\frac{\partial r'}{\partial \varphi''} = 1$. La deuxième des équations (27) est donc

$$Cr' + (B - A)pq = \Phi;$$

c'est une des équations d'Euler.

---

[1] Voyez, par exemple, mon *Traité de Mécanique*, t. II, Chap. XX.

Les deux autres équations (27) ne donnent pas immédiatement les deux autres équations d'Euler.

Mais nous pouvons procéder autrement d'une façon beaucoup plus symétrique, grâce à ce fait que la nouvelle forme d'équations s'applique à des paramètres qui ne sont pas de véritables coordonnées, mais qui sont liés aux paramètres θ, φ, ψ par des relations différentielles non intégrables. Introduisons alors trois nouveaux paramètres λ, μ, ν, dont les variations virtuelles sont liées à $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ par les formules

$$\begin{aligned}
\delta\lambda &= \sin\theta \sin\varphi\, \delta\psi + \cos\varphi\, \delta\theta,\\
\delta\mu &= \sin\theta \cos\varphi\, \delta\psi - \sin\varphi\, \delta\theta,\\
\delta\nu &= \cos\theta\, \delta\psi + \delta\varphi.
\end{aligned}$$

Nous pouvons considérer $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ comme indépendants et $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ comme donnés en fonction de $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ par les équations ci-dessus. Dans ces conditions, la somme des travaux virtuels des forces appliquées prend la forme

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu,$$

L, M, N désignant les sommes des moments des forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz; en effet, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sont les angles infiniment petits dont il faut faire tourner le corps autour de Ox, Oy, Oz pour l'amener de la position actuelle à une position infiniment voisine. Le déplacement obtenu en faisant $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$ est donc une rotation autour de Ox, et l'on a, pour expression du travail virtuel, $L\,\delta\lambda$, L étant la somme des moments des forces par rapport à Ox.

Le déplacement réel est donné par

$$d\lambda = \sin\theta \sin\varphi\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta, \quad \ldots,$$

ou, en divisant par dt,

$$\begin{aligned}
p = \lambda' &= \sin\theta \sin\varphi\, \psi' + \cos\varphi\, \theta',\\
q = \mu' &= \sin\theta \cos\varphi\, \psi' - \sin\varphi\, \theta',\\
r = \nu' &= \cos\theta\, \psi' + \varphi'.
\end{aligned}$$

On en tire

$$p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''$$

La fonction $2S$, donnée par la formule (24), est alors exprimée en fonction de λ'', μ'', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N,$$

ou encore, puisque λ'', μ'', ν'' sont égaux à p', q', r',

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = N.$$

Ce sont là les trois équations d'Euler

$$Ap' + (C - B)qr = L, \qquad \ldots.$$

9. *Deuxième application élémentaire.* — Supposons maintenant que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe O soit de révolution; prenons comme axe Oz l'axe de révolution et comme axes Ox et Oy deux axes mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace, définis comme il suit. Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1 trois axes fixes : l'axe Oy sera perpendiculaire au plan zOz_1 et l'axe Ox perpendiculaire au plan yOz. L'angle θ est alors l'angle z_1Oz, ψ l'angle x_1Oy. La rotation instantanée Ω du trièdre $Oxyz$ est la résultante de deux rotations, l'une $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ autour de Oy, l'autre $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$ autour de Oz_1; les composantes de cette rotation, suivant Ox, Oy, Oz, sont donc

$$(28) \qquad P = -\psi' \sin\theta, \qquad Q = \theta', \qquad R = \psi' \cos\theta.$$

Une fois le trièdre $Oxyz$ placé, il faut définir la position du solide par rapport à ce trièdre; pour cela, il suffit de connaître l'angle φ que fait une droite liée au corps dans le plan xOy avec l'axe Oy : la dérivée $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ de cet angle mesure la rotation propre du corps autour de Oz. La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rota-

tion Ω du trièdre et de la rotation propre φ' autour de Oz. On a donc, pour les projections p, q, r de ω sur les axes $Oxyz$,

$$(29)\qquad \begin{cases} p = P = -\psi' \sin\theta, \qquad q = Q = \theta', \\ r = R + \varphi' = \psi' \cos\theta + \varphi'. \end{cases}$$

On en conclut, en dérivant par rapport à t,

$$p = -\psi'' \sin\theta + \ldots, \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \psi'' \cos\theta + \varphi'' + \ldots.$$

En outre, l'ellipsoïde d'inertie étant de révolution autour de Oz,

$$B = A.$$

L'expression générale (19) de S devient actuellement, en remplaçant P et Q par p et q et remarquant que $D = E = F = 0$, puisque les axes mobiles sont des axes principaux d'inertie,

$$(30)\qquad 2S = A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots.$$

Pour une variation $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ des trois angles, la somme des travaux des forces appliquées prend la forme

$$\Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi;$$

comme le déplacement virtuel obtenu en faisant $\delta\varphi = \delta\psi = 0$ est une rotation autour de Oy, Θ est la somme $\mathfrak{M}_y$ des moments des forces par rapport à Oy; de même, Φ est la somme $\mathfrak{M}_z$ des moments des forces par rapport à Oz et Ψ la somme $\mathfrak{M}_{z_1}$ des forces par rapport à Oz_1.

Cela posé, écrivons les équations

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} = \Theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \Phi, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = \Psi.$$

Nous avons

$$Aq' + p(AR - Cr) = \mathfrak{M}_y,$$

$$Cr' = \mathfrak{M}_z,$$

$$-Ap' \sin\theta + Cr' \cos\theta + q(AR - Cr)\sin\theta = \mathfrak{M}_{z_1}.$$

La troisième équation se simplifie si l'on remarque que, en appelant $\mathfrak{M}_x$ la somme des moments par rapport à Ox, on a

$$\mathfrak{M}_{z_1} = \mathfrak{M}_z \cos\theta - \mathfrak{M}_x \sin\theta.$$

Les termes en $\cos\theta$ disparaissent alors dans la troisième équation, en vertu de la deuxième, et l'on a finalement les trois équations

$$A\frac{dp}{dt} - (AR - Cr)q = \mathfrak{M}_x,$$

$$A\frac{dq}{dt} + (AR - Cr)p = \mathfrak{M}_y,$$

$$C\frac{dr}{dt} = \mathfrak{M}_z.$$

On obtiendrait ces équations plus rapidement, sous la forme définitive, en introduisant, ainsi que nous l'avons fait dans le cas général, comme paramètres les trois quantités λ, μ, ν définies par les relations

$$\delta\lambda = -\sin\theta\,\delta\psi, \qquad \delta\mu = \delta\theta, \qquad \delta\nu = \cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi;$$

d'où, pour le déplacement réel,

$$p = \lambda' = -\sin\theta\,\psi', \qquad q = \mu' = \theta', \qquad r = \nu' = \cos\theta\,\psi' + \varphi',$$
$$p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''.$$

Les quantités $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sont donc encore les rotations élémentaires autour de Ox, Oy, Oz, et l'on a

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \mathfrak{M}_x\,\delta\lambda + \mathfrak{M}_y\,\delta\mu + \mathfrak{M}_z\,\delta\nu.$$

La fonction $2S$ donnée par l'expression (30) s'exprime alors immédiatement en fonction de λ'', μ'', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = \mathfrak{M}_x, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = \mathfrak{M}_y, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = \mathfrak{M}_z,$$

ou, comme $\lambda'' = p'$, $\mu'' = q'$, $\nu'' = r'$,

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = \mathfrak{M}_x, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = \mathfrak{M}_y, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = \mathfrak{M}_z.$$

Ce sont précisément les trois équations trouvées plus haut.

10. *Corps solide entièrement libre.* — Pour un corps solide entièrement libre, on obtient la fonction S en appliquant la formule (14) analogue à celle de König. Le terme $\Sigma m J_1^2$, relatif au mouvement du corps autour de son centre de gravité, sera donné par la formule (19) qui se rapporte au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. On a donc alors

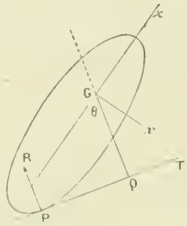
$$2S = MJ_0^2 + 2S_1,$$

S_1 désignant la fonction (19).

11. *Première application. Corps homogène pesant de révolution assujetti à glisser sans frottement sur un plan horizontal fixe.* — Imaginons un corps solide pesant assujetti aux conditions suivantes : 1° l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour d'un axe Gz ; 2° le corps touche un plan horizontal fixe par une surface de révolution autour du même axe. Ces conditions sont remplies en particulier pour un solide homogène pesant de révolution.

Représentons (*fig.* 1) la méridienne de la surface de révolution par

Fig. 1.



laquelle le corps doit toucher le plan fixe. Le plan tangent en un point P de cette méridienne est perpendiculaire au plan méridien zGP

sur lequel il a pour trace PQ. Soient ζ la distance GQ du centre de gravité au plan tangent et θ l'angle de cette perpendiculaire GQ avec Gz : ζ est une fonction de θ

$$\zeta = f(\theta)$$

qui est déterminée dès que la méridienne est donnée. Inversement, on peut se donner *a priori* la fonction $f(\theta)$: la surface correspondante a pour méridienne une courbe enveloppe des droites PT vérifiant cette condition. Il est évident en outre que, la méridienne étant déterminée, la distance PQ est aussi une fonction connue de θ. Pour déterminer cette fonction, remarquons que, par rapport aux axes Gx et Gz situés dans le plan de la méridienne, la tangente PT a pour équation

$$x \sin\theta - z \cos\theta = f(\theta).$$

La méridienne étant l'enveloppe de cette droite quand θ varie, on obtient les coordonnées du point de contact P, en associant à l'équation précédente sa dérivée par rapport à θ

$$x \cos\theta + z \sin\theta = f'(\theta).$$

Cette dernière équation représente une droite passant par P : c'est la normale PR; sa distance au point G est égale à QP. On a donc

$$\mathrm{QP} = \pm f'(\theta).$$

En outre, en résolvant les deux équations ci-dessus par rapport à x et z, on a les coordonnées de P.

$$(31) \qquad \begin{cases} x = f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)\sin\theta, \\ z = f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Ceci posé, plaçons le solide sur un plan horizontal fixe $\xi O \eta$ sur lequel il est assujetti à glisser sans frottement (*fig.* 2). Soit P le point de contact, GQ la distance du centre de gravité au plan : la verticale QGz_1 fait avec Gz un angle θ et l'on a, d'après ce qui précède,

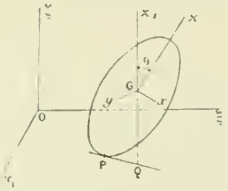
$$\mathrm{GQ} = \zeta = f(\theta).$$

Prenons comme axes fixes deux axes $O\xi$, $O\eta$ dans le plan horizontal et une verticale ascendante $O\zeta$; appelons ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G par rapport à ces axes : ζ est la quantité $f(\theta)$ que nous venons de définir.

Menons par le centre de gravité G trois axes de directions fixes $Gx_1y_1z_1$ parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$; l'axe Gz_1 est la verticale ascendante; cet axe est seul représenté sur la *fig.* 2.

Prenons, pour trièdre de référence, le trièdre formé par l'axe de révolution Gz, par l'axe Gx, perpendiculaire à Gz dans le plan méridien PGz du point de contact, enfin par l'axe Gy perpendicu-

Fig. 2.



laire aux précédents. Le plan zGx est vertical; l'axe Gy horizontal. Nous appellerons ψ l'angle de Gy avec une direction fixe du plan horizontal, Gx_1, par exemple. Dans ces conditions, la rotation instantanée Ω du trièdre mobile $Gxyz$ est la résultante de deux rotations l'une $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ autour de Gy, l'autre $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$ autour de Gz_1. Les composantes P, Q, R de cette rotation suivant Gx, Gy, Gz sont donc

$$(\Omega)\qquad \begin{cases} P = -\psi' \sin\theta, \\ Q = \theta', \\ R = \psi' \cos\theta. \end{cases}$$

Pour fixer l'orientation du solide autour du point G, il faut connaître la position du solide par rapport aux axes $Gxyz$; pour cela, il suffit de connaître l'angle φ que fait une droite liée au corps dans le plan xGy avec la droite Gy. La dérivée, $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$, de cet angle mesure la rotation propre du corps autour de Gz.

La rotation instantanée ω du corps est la résultante de la rotation Ω du trièdre $Gxyz$ et de la rotation propre φ' autour de Gz. On a donc pour les projections p, q, r de ω, les sommes des projections de Ω et φ',

$$(\omega)\qquad \begin{cases} p = \mathrm{P} = -\psi'\sin\theta, \\ q = \mathrm{Q} = \theta', \\ r = \mathrm{R} + \varphi' = \psi'\cos\theta + \varphi'. \end{cases}$$

On peut remarquer que

$$(32)\qquad \mathrm{R} = -p\cot\theta;$$

cette relation nous sera utile plus loin.

On a alors pour l'accélération du point G

$$\mathrm{J}_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2.$$

Mais la relation $\zeta = f(\theta)$ donne

$$\zeta' = f'(\theta)\theta', \qquad \zeta'' = f'(\theta)\theta'' + f''(\theta)\theta'^2.$$

Donc

$$\mathrm{J}_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + f'^2(\theta)\theta''^2 + 2f'f''\theta''\theta'^2 + \ldots.$$

D'autre part, la fonction S_1, dans le mouvement du corps autour du centre de gravité, a la forme (30), car les axes sont précisément ceux qui ont conduit à la forme (30). Donc

$$(33)\qquad 2S_1 = A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots.$$

Nous avons alors, en remplaçant R par sa valeur $-p\cot\theta$

$$\begin{aligned} 2S = {} & \mathrm{M}[\xi''^2 + \eta''^2 + f'^2(\theta)\theta''^2 + 2f'f''\theta''\theta'^2] \\ & + A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 - 2(Ap\cot\theta + Cr)(pq' - qp') + \ldots. \end{aligned}$$

Les forces appliquées dérivent d'ailleurs d'une fonction de forces $-\mathrm{M}g\zeta$ ou $-\mathrm{M}gf(\theta)$ et

$$\Sigma(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z) = -\mathrm{M}gf'(\theta)\delta\theta.$$

La position du système dépend de cinq paramètres arbitraires qui sont, si l'on veut,

$$\xi,\ \eta,\ \theta,\ \varphi,\ \psi.$$

On peut écrire alors les cinq équations du mouvement

$$(34)\qquad \frac{\partial S}{\partial \xi''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \eta''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = 0.$$

$$(35)\qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = -Mgf'(\theta),$$

dont l'une, la dernière, par exemple, peut être remplacée par l'équation de forces vives.

Les équations

$$p = -\psi' \sin\theta, \qquad q = \theta', \qquad r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

donnent

$$p' = -\psi'' \sin\theta + \ldots, \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \psi'' \cos\theta + \varphi'' + \ldots.$$

Donc S dépend de φ'' et ψ'' par l'intermédiaire de p' et r' et l'on a

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \frac{\partial S}{\partial r'}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = -\frac{\partial S}{\partial p'} \sin\theta + \frac{\partial S}{\partial r'} \cos\theta.$$

D'après cela, en écrivant les équations (34), on a

$$M\xi'' = 0, \qquad M\eta'' = 0, \qquad Cr' = 0,$$
$$-Ap' \sin\theta + Cr' \cos\theta - (Ap \cot\theta + Cr) \sin\theta\, \theta' = 0.$$

Ces équations s'intègrent immédiatement et donnent

$$\xi' = \xi'_0, \qquad \eta' = \eta'_0, \qquad r = r_0,$$
$$-Ap \sin\theta + Cr \cos\theta = K;$$

on retrouve ainsi les intégrales connues, auxquelles on peut adjoindre l'intégrale des forces vives.

12. Deuxième application. — *Corps homogène pesant de révolution assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe* $\xi O \eta$.

Employons les mêmes notations et les mêmes axes que dans le numéro précédent. Dans ce nouveau problème, les seuls paramètres indépendants sont θ, φ, ψ; si l'on donne à θ, φ, ψ des variations arbitraires $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, les variations de ξ, η, ζ s'en déduisent par la condition que le corps roule et pivote sur le plan.

Pour calculer actuellement J_0^2 en fonction de θ'', φ', ψ'' il paraît plus commode de ne pas conserver ξ et η, mais d'introduire les projections u, v, w de la vitesse absolue V_0 du point G sur les axes mobiles $Gxyz$. Nous avons, dans le numéro précédent, calculé les coordonnées x, y, z du point, P, de contact avec le plan, par rapport aux axes $Gxyz$; nous avons vu que $y = 0$ et que x et z sont des fonctions du seul angle θ dépendant de la fonction $f(\theta)$ qui détermine la forme du corps (formules 31).

Exprimons que le corps roule et pivote sur le plan. Pour cela, il faut écrire que la vitesse absolue du point matériel du corps qui est en P est *nulle*. Or cette vitesse est la résultante d'une vitesse d'entraînement V_0 égale à la vitesse de G et d'une vitesse relative due à la rotation du corps autour de G. On a ainsi les conditions

$$(36)\qquad \begin{cases} u + qz - ry = 0, \\ v + rx - pz = 0, \\ w + py - qx = 0, \end{cases}$$

où y est nul, mais où nous laissons provisoirement y pour ne pas détruire la symétrie.

Cela posé, l'accélération absolue J_0 du point G a pour projections sur les axes $Gxyz$ les quantités

$$\frac{du}{dt} + qw - Rv,$$

$$\frac{dv}{dt} + Ru - pw,$$

$$\frac{dw}{dt} + pv - qu.$$

Ce sont là des formules connues que l'on établira sans peine en remarquant que l'accélération d'un point est la vitesse de l'extrémité d'un segment, d'origine fixe, égal à la vitesse du point. On a donc ici

$$J_0^2 = (u' + qw - Rv)^2 + (v' + Ru - pw)^2 + (w' + pv - qu)^2,$$

en désignant par des accents les dérivées par rapport au temps. En développant et se bornant aux termes en u', v', w'

$$\begin{aligned} J_0^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 &+ 2p(vw' - wv') \\ &+ 2q(wu' - uw') + 2R(uv' - vu') + \ldots. \end{aligned}$$

Mais les relations (36) donnent

$$(37)\quad \begin{cases} u = ry - qz, & u' = r'y - q'z + ry' - qz', \\ v = pz - rx, & v' = p'z - r'x + pz' - rx', \\ w = qx - py, & w' = q'x - p'y + qx' - py'; \end{cases}$$

on en déduit facilement

$$\begin{aligned} vw' - wv' &= x(up' + vq' + wr') + \ldots, \\ wu' - uw' &= y(up' + vq' + wr') + \ldots, \\ uv' - vu' &= z(up' + vq' + wr') + \ldots, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$J_0^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2(px + qy + Rz)(up' + vq' + wr') + \ldots.$$

L'expression de $2S_1$ est la même que dans l'exemple précédent (formule 33).

Nous avons donc pour $2S = MJ_0^2 + 2S_1$, l'expression suivante que nous écrivons, en prenant la masse du corps M pour unité,

$$(38)\quad \begin{aligned} 2S = u'^2 + v'^2 + w'^2 &+ 2(px + qy + Rz)(up' + vq' + wr') \\ &+ A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots. \end{aligned}$$

expression où il faut supposer u, v, w, u', v', w' remplacés par les expressions (37).

Conservons alors le paramètre θ et prenons au lieu de φ et ψ deux paramètres λ et ν définis par

$$\delta\lambda = -\sin\theta\,\delta\psi, \qquad \delta\nu = \cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi.$$

On aura

$$p = -\sin\theta\,\psi' = \lambda', \qquad q = \theta', \qquad r = \cos\theta\,\psi' + \varphi' = \nu',$$

$$(39) \qquad p' = \lambda'', \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \nu''.$$

Enfin, pour une variation virtuelle $\delta\lambda$, $\delta\theta$, $\delta\nu$ attribuée à ces paramètres on a, pour la somme des travaux des forces appliquées, le travail de la seule pesanteur

$$-g\,\delta z = -g f'(\theta)\,\delta\theta.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = -g f'(\theta).$$

On encore, d'après (39),

$$(40) \qquad \frac{\partial S}{\partial p'} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = -g f'(\theta).$$

La troisième de ces équations pourra être remplacée par l'intégrale des forces vives

$$2T = -g f(\theta) + h.$$

Nous allons écrire les deux premières. D'après la valeur (38) de S et les expressions (37) de u', v', w' en fonction de p', q', r', on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial p'} &= u'\frac{\partial u'}{\partial p'} + v'\frac{\partial v'}{\partial p'} + w'\frac{\partial w'}{\partial p'} \\ &\quad + u(px + qy + Rz) + Ap - (AR - Cr)q;\end{aligned}$$

mais

$$\frac{\partial u}{\partial p'} = 0, \qquad \frac{\partial v'}{\partial p'} = z, \qquad \frac{\partial w'}{\partial p'} = -y.$$

On a ainsi, en se rappelant maintenant que y est nul,

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = zv' + u(px + Rz) + Ap' - (AR - Cr)q.$$

On trouve par un calcul analogue

$$\frac{\partial S}{\partial r'} = -xv' + w(px + Rz) + Cr'.$$

Nous avons donc, pour les deux équations $\frac{\partial S}{\partial p'} = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial r'} = 0$, les deux équations suivantes que nous écrivons, en remplaçant q par θ', R par sa valeur $-p\cot\theta$, u, v, w par leurs expressions (37),

$$(41)\quad \begin{cases} zv' - pz(x - z\cot\theta)\theta' + Ap' + (Ap\cot\theta + Cr)\theta' = 0, \\ -xv' + px(x - z\cot\theta)\theta' + Cr' = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace v', θ', p', r' par $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, on voit que dt disparaît et ces équations peuvent être regardées comme définissant p et r en fonction de θ, par deux équations linéaires et homogènes simultanées que nous allons écrire.

Nous remplacerons la première équation de ce système par celle qu'on obtient en éliminant v' entre les deux : on a ainsi les deux équations

$$Ax\frac{dp}{d\theta} + Cz\frac{dr}{d\theta} + x(Ap\cot\theta + Cr) = 0,$$

$$-x\frac{dv}{d\theta} + px(x - z\cot\theta) + C\frac{dr}{d\theta} = 0,$$

où d'après (37)

$$\frac{dv}{d\theta} = z\frac{dp}{d\theta} - x\frac{dr}{d\theta} + p\frac{dz}{d\theta} - r\frac{dx}{d\theta}.$$

Remplaçant $\frac{dx}{d\theta}$ par cette valeur, nous avons le système des deux équations

$$(42)\quad \begin{cases} Ax\frac{dp}{d\theta} + Cz\frac{dr}{d\theta} + x(Ap\cot\theta + Cr) = 0, \\ -xz\frac{dp}{d\theta} + (C + x^2)\frac{dr}{d\theta} + px\left(x - z\cot\theta - \frac{dz}{d\theta}\right) + rx\frac{dx}{d\theta} = 0, \end{cases}$$

pour déterminer p et r en fonction de θ.

Il convient de rappeler que, dans ces équations, x et z sont des fonctions connues de θ dépendant de la forme du corps : ces fonctions sont définies par les formules (31) que nous rappelons ici

$$(43)\quad \begin{cases} x = f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)\sin\theta, \\ z = f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Remarques sur ces équations. — L'étude de ce système de deux équations linéaires et des formes de la fonction $f(\theta)$ qui en permettent l'intégration constitue un problème d'Analyse intéressant. Nous nous bornerons ici à faire quelques remarques sur ces équations.

En éliminant $\frac{dp}{d\theta}$ entre les deux équations (42), on a

$$(44)\quad (AC + Ax^2 + Cz^2)\frac{dr}{d\theta} + Apx\left(x - \frac{dz}{d\theta}\right) + rx\left(Cz + A\frac{dx}{d\theta}\right) = 0,$$

d'où

$$(45)\quad Ap = -\frac{(AC + Ax^2 + Cz^2)\frac{dr}{d\theta} + rx\left(Cz + A\frac{dx}{d\theta}\right)}{x\left(x - \frac{dz}{d\theta}\right)}.$$

Portant cette valeur de p dans la première des équations (42), on obtient une équation linéaire homogène du deuxième ordre donnant r en fonction de θ. Cette équation étant intégrée, la relation (44) donne p en fonction de θ. Puis l'intégrale des forces vives donne t en θ par une quadrature.

Cas particuliers. — 1° Dans le cas particulier où x et z sont des constantes indépendantes de θ, $x = a$, $z = c$, on retrouve les équations du mouvement d'un corps homogène pesant, de révolution, roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal (*Voyez* un article inséré dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, suivi d'une lettre de M. Korteweg, 1er fascicule 1900).

2° Un autre cas particulier où l'équation (44) peut s'intégrer est le cas où la forme du corps est telle que

$$x - \frac{dz}{d\theta} = 0.$$

D'après les expressions (43) de x et z, cette condition devient

$$f''(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta = 0,$$

d'où

$$f(\theta) = a\cos\theta + b,$$

a et b désignant deux constantes. La méridienne de la surface de révolution correspondante est alors l'enveloppe de la droite

$$x\sin\theta - z\cos\theta = a\cos\theta + b;$$

c'est un cercle dont le centre est sur Gz. La surface est alors une *sphère*. Actuellement

$$x = b\sin\theta, \qquad z = -a - b\cos\theta,$$

et l'équation (44) donne r en fonction de θ par une quadrature élémentaire.

Cette équation s'écrit, en effet,

$$\frac{dr}{r} = -\frac{x\left(A\frac{dx}{d\theta} + Gz\right)d\theta}{Ax^2 + Gz^2 + AG},$$

d'après la relation $\frac{dz}{d\theta} = x$; le numérateur du deuxième membre est,

au facteur 2 près, la dérivée du dénominateur et l'on a

$$r = \frac{k}{\sqrt{Ax^2 + Cz^2 + AC}}.$$

La première des équations (42) donne alors p par une quadrature.

3° Un autre cas où la forme des équations (42) se simplifie est le cas où la forme du corps est telle que

$$x - z\cot\theta - \frac{dz}{d\theta} = 0.$$

13. *Remarque sur l'équation des forces vives.* — Supposons les liaisons indépendantes du temps. Alors on a, en reprenant les formules (9) où a, b, c sont nuls

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_1 q'_1 + a_2 q'_2 + \ldots + a_n q'_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Donc x', y', z' sont homogènes et linéaires en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

La demi-force vive T est alors liée à S par la formule

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n.$$

En effet,

$$S = \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} = \sum m\left(x'' \frac{\partial x''}{\partial q''_1} + y'' \frac{\partial y''}{\partial q''_1} + z'' \frac{\partial z''}{\partial q''_1}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial x''}{\partial q''_1} = a_1, \qquad \frac{\partial y''}{\partial q''_1} = b_1, \qquad \frac{\partial z''}{\partial q''_1} = c_1.$$

Donc

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} = \sum m(x'' a_1 + y'' b_1 + z'' c_1).$$

De même

$$\frac{\partial S}{\partial q''_2} = \sum m(x'' a_2 + y'' b_2 + z'' c_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multipliant par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ et ajoutant, on a, d'après les expressions (46) de x'', y'', z'',

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q_n} q'_n = \sum m(x''x' + y''y' + z''z') = \frac{dT}{dt}.$$

Le théorème des forces vives est alors exprimé par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q_n} q'_n = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_n q'_n,$$

équivalente à

$$dT = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 + \ldots + Q_n\, dq_n.$$

Sur les équations aux dérivées partielles [1].

PAR M. H. DUPORT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1897, Fasc. I), j'ai étudié le système suivant de deux équations de Pfaff :

$$(1) \qquad \Sigma a_i dx_i = 0, \qquad \Sigma b_i dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

où les quantités a_i et b_i sont des fonctions quelconques des quantités x_i.

Ce système est particulièrement intéressant dans le cas où le nombre des variables arbitraires est de deux, car il constitue un système intermédiaire entre les équations du premier et du second ordre, et il paraît bien choisi pour s'occuper de la recherche des cas où l'on peut en trouver les solutions à l'aide d'équations différentielles ordinaires.

Je me propose d'exposer dans cette Note deux nouveaux cas d'intégration. Le premier paraîtra, je pense, intéressant, si l'on remarque qu'il renferme, en particulier, l'équation de Laplace dans le cas le plus général; le second, si l'on considère que le système (1) est susceptible d'être ramené à une équation du second ordre, est celui où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et fait espérer que la

(1) Ce Mémoire a été résumé dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 janvier 1900).

proposition pourra être vraie dans le cas d'une équation quelconque du second ordre.

I. Je rappellerai que pour faire l'étude du système (1), j'ai posé les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
(\lambda a_{11} + \mu b_{11})\Delta_1 + \ldots + (\lambda a_{16} + \mu b_{16})\Delta_6 + \alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda a_{61} + \mu b_{61})\Delta_1 + \ldots + (\lambda a_{66} + \mu b_{66})\Delta_6 + \alpha a_6 + \beta b_6 = 0, \\
\qquad\qquad - a_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad - a_6\Delta_6 \qquad\qquad = 0, \\
\qquad\qquad - b_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad - b_6\Delta_6 \qquad\qquad = 0,
\end{array}$$

où l'on a

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i},$$

i et j désignant, comme dans la suite de cette Note, deux des six premiers nombres.

Le déterminant de ces huit équations, où $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \alpha, \beta$ sont les inconnues, est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair, qui est par suite carré parfait. En écrivant qu'il est nul, on a une équation du second ordre pour déterminer le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Supposons d'abord que cette équation ait ses racines distinctes. La première racine fournit pour $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ les expressions

$$\Delta_i = A_i + \omega B_i,$$

où ω est une arbitraire. La seconde fournit pour $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ les expressions

$$\Delta_i = C_i + \omega' D_i,$$

où ω' est une arbitraire.

Si l'on pose les équations

$$(2) \qquad \Sigma C_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad \Sigma D_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

quand ces équations ont deux solutions communes F_1 et F_2, l'équation

$$F_2 = f(F_1)$$

est une intégrale intermédiaire des équations (1); f est une fonction arbitraire d'une variable.

Je vais maintenant étudier le cas où les équations (2) ont une seule solution commune F. J'ai déjà montré que dans ce cas, en posant $F = \text{constante}$, on obtenait un système de solutions des équations (1) renfermant une fonction arbitraire. Mais on peut aussi obtenir, ainsi que je vais le montrer, toutes les solutions de (1), exprimées au moyen de deux fonctions arbitraires de la même variable.

Je rappellerai que si l'on pose

$$(A_1 + \omega B_1)a_{i1} + \ldots + (A_6 + \omega B_6)a_{i6} = R_i + \omega S_i,$$

l'équation

$$(3) \qquad \Sigma(R_i + \omega S_i)\,dx_i = 0,$$

où ω est convenablement choisi, est une conséquence des équations (1). On a, de plus, les relations

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma C_i a_i = 0, & \Sigma C_i b_i = 0, & \Sigma C_i R_i = 0, & \Sigma C_i S_i = 0. \\ \Sigma D_i a_i = 0, & \Sigma D_i b_i = 0, & \Sigma D_i R_i = 0, & \Sigma D_i S_i = 0. \end{cases}$$

Si l'on joint à ces équations les formules (2), on voit que l'on peut déterminer des quantités γ, δ, ρ, σ telles que l'on ait

$$(5) \qquad \gamma a_i + \delta b_i + \rho R_i + \sigma S_i = \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

car sans cela les équations

$$\Sigma C_i X_i = 0, \qquad \Sigma D_i X_i = 0,$$

où les quantités X_i sont les inconnues, auraient cinq solutions communes distinctes. Le raisonnement serait en défaut, si tous les déterminants du Tableau

$$(6) \qquad \begin{matrix} a_1 & \ldots & a_6 \\ b_1 & \ldots & b_6 \\ R_1 & \ldots & R_6 \\ S_1 & \ldots & S_6 \end{matrix}$$

étaient nuls; mais ce cas ne peut se présenter quand l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a ses racines distinctes. Je reviendrai sur ce point tout à l'heure.

Supposons dès lors que, par suite d'un changement de variables, on ait pris la fonction F pour la variable x_1 indépendante, et soit x_2 la seconde variable indépendante. On aura en somme les équations

$$(7)\qquad \begin{gathered} \Sigma a_i\,dx_i = 0, \qquad \Sigma b_i\,dx_i = 0, \qquad \Sigma(R_i + \omega S_i)\,dx_i = 0, \\ \rho\Sigma R_i\,dx_i + \sigma\Sigma S_i\,dx_i = dx_1. \end{gathered}$$

On ne peut avoir

$$\rho\omega = \sigma,$$

car il en résulterait $dx_1 = 0$; les deux dernières équations (7) peuvent s'écrire alors

$$\Sigma R_i\,dx_i = g\,dx_1,$$
$$\Sigma S_i\,dx_i = h\,dx_1.$$

On voit alors qu'en séparant les équations relatives à la variable x_1, de celles relatives à la variable x_2, les quantités g et h s'éliminent, et l'on a le système suivant :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & a_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + a_4\frac{\partial x_4}{\partial x_2} + a_5\frac{\partial x_5}{\partial x_2} + a_6\frac{\partial x_6}{\partial x_2} + a_2 = 0, \\ & b_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + b_4\frac{\partial x_4}{\partial x_2} + b_5\frac{\partial x_5}{\partial x_2} + b_6\frac{\partial x_6}{\partial x_2} + b_2 = 0, \\ & R_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + R_4\frac{\partial x_4}{\partial x_2} + R_5\frac{\partial x_5}{\partial x_2} + R_6\frac{\partial x_6}{\partial x_2} + R_2 = 0, \\ & S_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + S_4\frac{\partial x_4}{\partial x_2} + S_5\frac{\partial x_5}{\partial x_2} + S_6\frac{\partial x_6}{\partial x_2} + S_2 = 0, \\ & a_3\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + a_4\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + a_5\frac{\partial x_5}{\partial x_1} + a_6\frac{\partial x_6}{\partial x_1} + a_1 = 0, \\ & b_3\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + b_4\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + b_5\frac{\partial x_5}{\partial x_1} + b_6\frac{\partial x_6}{\partial x_1} + b_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quatre premières s'intègrent en considérant x_1 comme une

arbitraire, et l'on en tire

$$x_3 = \Phi_3(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_4 = \Phi_4(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_5 = \Phi_5(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_6 = \Phi_6(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$

C_1, C_2, C_3, C_4 étant des fonctions de x_1. En portant ces valeurs dans les deux dernières équations (8), on est ramené à un système

$$l_1 \frac{dC_1}{dx_1} + l_2 \frac{dC_2}{dx_1} + l_3 \frac{dC_3}{dx_1} + l_4 \frac{dC_4}{dx_1} + l_5 = 0,$$
$$m_1 \frac{dC_1}{dx_1} + m_2 \frac{dC_2}{dx_1} + m_3 \frac{dC_3}{dx_1} + m_4 \frac{dC_4}{dx_1} + m_5 = 0,$$

qui ne renferme plus la variable x_2.

On sait qu'on peut exprimer C_1, C_2, C_3, C_4, x_1 en fonction d'une variable arbitraire v, de deux fonctions f et φ de cette variable, des dérivées premières et secondes de f et de la dérivée première de φ [*Mémoire sur les équations aux dérivées partielles* (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, Chap. V; 1895)].

La proposition que j'avais en vue est donc démontrée.

II. Je vais commencer par montrer que dans le cas où tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls, l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a une racine double et réciproquement. J'ai démontré que l'équation

$$\Sigma A_i S_i = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ ait ses racines égales. Comme on a déjà

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma A_i a_i = 0, & \Sigma A_i b_i = 0, & \Sigma A_i R_i = 0, & \Sigma(A_i S_i + B_i R_i) = 0, \\ \Sigma B_i a_i = 0, & \Sigma B_i b_i = 0, & \Sigma B_i S_i = 0, & \end{cases}$$

et comme, si tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls, on peut déterminer des quantités γ, δ, ρ, σ telles que l'on ait

$$\gamma a_i + \delta b_i + \rho R_i + \sigma S_i = 0,$$

on voit que l'on a nécessairement, ρ et σ ne pouvant être nuls tous deux, l'une des équations

$$\Sigma A_i S_i = 0, \qquad \Sigma B_i R_i = 0$$

qui entraîne l'autre. L'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a donc bien une racine double quand tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls.

Inversement, remarquons d'abord qu'en vertu des équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Sigma A_i a_i = 0, & \Sigma A_i b_i = 0, & \Sigma A_i R_i = 0, & \Sigma A_i S_i = 0, \\ \Sigma B_i a_i = 0, & \Sigma B_i b_i = 0, & \Sigma B_i R_i = 0, & \Sigma B_i S_i = 0, \end{array} \right.$$

tous les déterminants du Tableau (6) se réduisent à un seul, car il suffit de tirer de ces équations (10) deux des quantités a_i, b_i, R_i, S_i en fonction des autres.

Cela posé, supposons que, par suite d'un changement de variables, on ait ramené l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ à avoir une racine nulle. Pour qu'elle ait une racine double, il faudra que le terme en $\frac{\lambda}{\mu}$ soit aussi nul. Cette condition sera du premier degré dans les binomes $a_i b_j - a_j b_i$ et ne pourra, par suite, différer de la condition obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants du Tableau (6).

Dès lors l'équation en ω d'où dépend la solution du système (1) s'abaisse au premier ordre [voir *Mémoire sur les équations différentielles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Fasc. 1, p. 71 du Mémoire; 1897)].

Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques;

PAR M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. M. Poincaré a obtenu, dans son beau Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894), entre autres les résultats suivants :

1° Tout domaine (D) limité par une surface fermée (S) donne lieu à une suite infinie de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots$$

jouissant des propriétés que voici : elles s'annulent toutes sur la frontière du domaine (D) et vérifient dans toute l'étendue de ce domaine les équations

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

où

$$\Delta U_p = \frac{\partial^2 U_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial z^2},$$

les nombres

$$(1) \qquad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots$$

étant des constantes positives; on a

$$k_p < k_{p+1}$$

et la suite (1) ne contient jamais qu'un nombre fini de termes ayant une même valeur; enfin l'intégrale

$$(2) \qquad \int_{(D)} U_p U_{p'} \, d\tau,$$

où $d\tau$ représente un élément de volume et où l'indice (D) indique que l'intégration doit être étendue à tout le volume (D), est égale à l'unité ou à zéro selon que $p = p'$ ou que $p \neq p'$.

Nous dirons, avec M. Poincaré, que U_p est une fonction harmonique ayant le nombre k_p pour nombre caractéristique.

2° Soit u la fonction qui s'annule sur la surface (S) et qui satisfait dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \Delta u + \xi u + f = 0,$$

où f est une fonction donnée de x, y, z. Cette fonction u considérée comme fonction du paramètre ξ est une fonction méromorphe dont tous les pôles sont simples et font partie de la suite (1). En outre, le résidu correspondant à un pôle k_p est une combinaison linéaire et homogène des fonctions harmoniques admettant le nombre k_p pour nombre caractéristique.

3° Lorsqu'une fonction $f(x, y, z)$ s'annule sur la frontière (S) du domaine (D) ainsi que les quantités Δf et $\Delta\Delta f$, supposées exister dans toute l'étendue du domaine (D), elle est développable en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. J'ajoute que, d'après M. Leroy (*Thèse de Doctorat*), il en sera encore ainsi si $\Delta\Delta f$ existe, mais ne s'annule pas sur (S), les autres conditions précédentes étant satisfaites.

Voici maintenant l'objet principal du présent Travail :

Je me propose de démontrer, en supposant que la surface (S), qui peut se composer de plusieurs nappes séparées, admette en chacun de

ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe, que toute fonction $f(x, y, z)$, si elle s'annule sur (S) et si Δf existe, sera développable en une série uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (D), procédant suivant des fonctions dont chacune est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions harmoniques.

Je m'appuierai sur une remarque faite par M. Poincaré dans le Mémoire cité et que l'on peut, en la généralisant un peu, énoncer ainsi : La fonction $f(x, y, z)$ pourra certainement être représentée par le développement qui nous occupe s'il est possible de définir, dans le plan de la variable complexe ξ, une suite infinie de contours fermés (C_1), (C_2), (C_3), ... enveloppant chacun l'origine, tels que la plus courte distance de l'origine au contour (C_p) croisse indéfiniment en même temps que l'indice p et tels enfin que l'intégrale curviligne

$$\int u\,d\xi,$$

prise suivant le contour (C_p), ait $-2\pi i f$ pour limite, lorsque l'indice p croît indéfiniment.

II. — Sur l'intégration de l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0.$$

2. Soient :

(S) une surface fermée admettant en chacun de ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe différente de zéro;

(D) le domaine limité par cette surface, qui peut d'ailleurs se composer de plusieurs nappes entièrement séparées;

$\Theta(x', y', z')$ une fonction continue des coordonnées d'un point (x', y', z') variable sur la surface (S);

ds l'élément de la surface (S) relatif au point (x', y', z');

r la distance de ce point à un point quelconque (x, y, z) de l'espace;

N la normale intérieure à la surface (S) au point (x', y', z');

soit enfin α celle des déterminations de l'expression $\sqrt{-\xi}$ dont la partie réelle est positive.

Posons

$$(4)\qquad \psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta(x', y', z')\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds,$$

considérons un point (x_0, y_0, z_0) situé sur la surface (S) et désignons par r_0 la distance de ce point au point (x', y', z'). La fonction

$$\psi(x, y, z)$$

tendra vers une limite déterminée lorsque le point (x, y, z) tendra vers le point (x_0, y_0, z_0) en restant constamment à l'intérieur de la surface (S) ou en restant constamment à l'extérieur de cette surface.

Désignons cette limite par $(\psi)_i$ dans le premier cas et par $(\psi)_e$ dans le second. On aura

$$(5)\qquad (\psi)_i = -\frac{1}{2}\Theta(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,ds,$$

$$(6)\qquad (\psi)_e = \frac{1}{2}\Theta(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,ds,$$

d'où

$$(7)\qquad (\psi)_i - (\psi)_e = \Theta(x_0, y_0, z_0).$$

Cela posé, désignons par ϖ une fonction continue donnée des coordonnées du point (x', y', z') et posons

$$(8)\qquad \begin{cases} v_1 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \varpi\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds, \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S (v_n)_e\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Je dis que lorsque l'argument de ξ ne se réduit pas à un multiple de 2π, la série

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

sera convergente pourvu que le module de ce paramètre soit assez grand; en outre, la somme v de la série précédente satisfera dans le domaine (D) à l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0 \tag{10}$$

et se réduira sur (S) à la fonction donnée ϖ.

5. Envisageons, pour démontrer l'assertion précédente, les formules (5) et (6), désignons par C le maximum du module de la fonction Θ, par m le module de μ et par a la partie réelle de cette quantité. On s'assurera aisément qu'il est possible de trouver deux constantes positives A et B telles que l'on ait, quelle que soit la position du point (x_0, y_0, z_0) sur la surface (S),

$$|(\psi)_i| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{a} + \frac{Bm}{a^2}\right)C,$$
$$|(\psi)_e| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{a} + \frac{Bm}{a^2}\right)C.$$

Par conséquent, l'argument du paramètre ξ ayant une valeur fixe ne se réduisant pas à un multiple de 2π, on aura pour toutes les valeurs assez grandes du module

$$|(\psi)_i| < \tfrac{1}{2}(1 + \eta)C,$$
$$|(\psi)_e| < \tfrac{1}{2}(1 + \eta)C,$$

où η représente une constante positive inférieure à l'unité. On déduit de là et des équations (8) que l'on aura

$$|(v_n)_i| < \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^n \Omega,$$
$$|(v_n)_e| < \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^n \Omega,$$

où Ω représente le maximum du module de la fonction ϖ. Cela prouve

que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_e$$

sont convergentes. Il s'ensuit d'abord que la série (9) sera convergente. On en déduit, en tenant compte des relations

$$(v_1)_i - (v_1)_e = \varpi,$$
$$(v_n)_i - (v_n)_e = -(v_{n-1})_e \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

relations qui résultent du théorème exprimé par l'équation (7), que l'on aura

$$\varpi = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_i.$$

Il est donc certain que la fonction v, somme de la série (9), se réduit bien à la fonction donnée ϖ sur la surface (S). Or, la fonction v peut être regardée comme donnée par la formule

$$(11) \qquad v = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\varpi - \sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_e\right]\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds;$$

elle satisfera donc dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation (10). La proposition qu'il s'agissait d'établir est donc démontrée.

La formule (11) et l'ensemble des considérations qui nous ont servi à l'établir conduisent aisément à la proposition suivante qui nous sera utile dans la suite : Soient, comme plus haut, m le module de μ, a la partie réelle de cette quantité et Ω le maximum du module de la fonction ϖ : soient, en outre, d la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) et ε un nombre positif assez petit dépendant uniquement de la surface (S), l'inégalité

$$(12) \qquad \frac{m}{a^2} < \varepsilon$$

entraînera, si d est inférieur à une certaine longueur assez petite,

l'inégalité

$$(13) \qquad |v(x, y, z)| < E \frac{me^{-ad}}{a} \Omega,$$

où E représente un nombre positif ne dépendant que de la nature de la surface (S).

4. Considérons deux points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) situés à l'intérieur du domaine (D), désignons par r leur distance et appelons $G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ la fonction qui jouit des propriétés suivantes : elle s'annule sur (S) et satisfait à l'équation

$$(14) \qquad \Delta G + \xi G = 0$$

dans tout le domaine (D), exception faite du point (x_0, y_0, z_0) où elle devient infinie, mais de façon que la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

reste finie et continue. A l'exemple de M. Poincaré, nous donnerons le nom de *fonction de Green généralisée* à la fonction précédente.

Désignons par $d\tau$ l'élément de volume relatif au point (x, y, z) et proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$(15) \qquad I = \int_D |G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)|^2 d\tau.$$

Je mets à cet effet en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction G et du paramètre ξ; soient

$$G = G_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + iG_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$
$$\xi = \alpha + i\beta.$$

L'équation (14) nous donnera

$$\Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 = 0,$$
$$\Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0,$$

d'où

$$(16)\qquad G_2\Delta G_1 - G_1\Delta G_2 = \beta(G_1^2 + G_2^2).$$

Désignons par (D') la partie du domaine (D) qui est extérieure à une petite sphère (Σ) de rayon ρ et de centre (x_0, y_0, z_0), multiplions l'équation (16) par l'élément de volume $d\tau$ et intégrons en étendant l'intégration à tout le domaine (D'). Il viendra, en appliquant le théorème de Green et en tenant compte de ce que les fonctions G_1 et G_2 s'évanouissent sur la surface (S),

$$(17)\qquad \beta\int_{D'}(G_1^2 + G_2^2)\,d\tau = \int_{\Sigma}\left(G_1\frac{dG_2}{dN} - G_2\frac{dG_1}{dN}\right)d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente un élément de la surface de la sphère (Σ). J'observe que la fonction

$$g = G = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

sera une fonction finie et continue des variables (x, y, z) et qu'elle satisfera dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation

$$(18)\qquad \Delta g + \xi g = 0.$$

Posons, en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction g,

$$g = g_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + i g_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

et faisons tendre le rayon ρ de la sphère (Σ) vers zéro; l'équation (17) nous donnera

$$\beta I = -\frac{b}{4\pi} + g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0),$$

où b est le coefficient de l'unité imaginaire dans μ.

Or nous avons

$$\mu^2 = (a + ib)^2 = \xi = \alpha - i\beta,$$

d'où

$$\beta = -2ab;$$

il viendra donc

$$(19) \qquad I = \frac{1}{8\pi a} + \frac{g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)}{\beta}.$$

5. Je me propose de démontrer maintenant que lorsque l'inégalité (12) est vérifiée, on peut trouver une constante positive H telle que l'on ait

$$(20) \qquad I < \frac{H}{a},$$

quelle que soit la position du point (x_0, y_0, z_0) dans le domaine (D). Je m'appuierai pour cela sur ce fait que g vérifie l'équation (18) et que, dans les conditions où nous nous sommes placés, cette fonction pourra être déterminée par la méthode d'intégration exposée dans les premiers numéros de la présente Section. Soit d'abord

$$(21) \qquad |b| = \frac{a}{2}.$$

Désignons par O le point de la surface (S) le plus voisin du point (x_0, y_0, z_0), par d la distance de ces deux points et par R une longueur constante dépendant uniquement de la surface (S) choisie de façon que, sous la condition $d \leq R$, le symétrique (x_1, y_1, z_1) du point (x_0, y_0, z_0) par rapport au point O soit extérieur au domaine (D) et que, de plus, le point O soit le point de la surface (S) le plus voisin du point (x_1, y_1, z_1). L'existence de la longueur R est une conséquence immédiate de l'hypothèse faite au sujet de la surface (S). Soit d'abord $d > R$. On conclura immédiatement de la formule (11) que, dans ce cas, le module de g et, à plus forte raison, la valeur absolue de $g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)$ ne dépasseront pas une limite assignable. D'ailleurs, l'inégalité (21) nous donne, en tenant compte de la relation $\beta = -2ab$, $|\beta| > a^2$. Il suffit maintenant de se reporter à l'équation (19) pour être assuré de l'existence de la constante H qui figure dans l'inégalité (20). Supposons toujours que l'inégalité (21) ait lieu,

mais soit maintenant $d \geq R$. Désignons par r_1 la distance du point (x, y, z) au point (x_1, y_1, z_1) et posons

$$g = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} + \varphi(x, y, z). \tag{22}$$

La fonction φ vérifiera l'équation

$$\Delta\varphi + \xi\varphi = 0,$$

et le module de cette fonction sur la surface (S) ne dépassera pas la quantité $H' + H''md$, où H' et H'' sont des constantes positives, dépendant uniquement de la surface (S). En supposant, ce qui est permis, que R soit assez petit pour que, sous la condition $d \geq R$, l'inégalité (13) ait lieu, on déduira de là et de l'équation (22) que l'on aura

$$|g(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)| < \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-2ad}|\sin 2bd|}{2d} + \frac{me^{-ad}}{a}E(H' + H''md).$$

Par conséquent, l'équation (19) nous donnera

$$I < \frac{A'}{a} + B'\frac{me^{-ad}}{a|\beta|} + C'\frac{m^2de^{-ad}}{a|\beta|}, \tag{23}$$

où A', B' et C' sont des constantes ne dépendant que de la surface (S). D'ailleurs,

$$\frac{m^2de^{-ad}}{a\beta} = \frac{m^2ade^{-ad}}{a^2\beta} \tag{24}$$

et

$$\frac{m^2}{a^2\beta} = -\frac{a^2 + b^2}{2a^3b} = -\frac{1}{2ab} - \frac{b}{2a^2}\frac{1}{a}. \tag{25}$$

Or, l'inégalité (12) nous donne

$$\frac{m^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} < \varepsilon^2,$$

d'où

$$\left|\frac{b}{a^2}\right| < \varepsilon;$$

l'équation (25) nous donnera, par conséquent, en tenant compte de l'inégalité (21),

$$\left|\frac{m^2}{a^2\beta}\right| < \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

donc, en vertu de l'équation (24),

$$\left|\frac{m^2 de^{-ad}}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et comme $m > a$, l'inégalité (21) nous donne

$$\frac{1}{a} < \varepsilon;$$

il vient, par conséquent,

$$\left|\frac{m^2 de^{-ad}}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\,\frac{3\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

L'inégalité (21) entraîne la conséquence $|\beta| \geq a^2$; on aura à cause de cela

$$\left|\frac{m}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\,\frac{m}{a^2},$$

d'où, à cause de l'inégalité (12),

$$\left|\frac{m}{a\beta}\right| < \frac{\varepsilon}{a}.$$

Il résulte immédiatement de cette inégalité et des inégalités (26) et (23) que la constante H qui figure dans l'inégalité (20) existera dans le cas que nous venons d'examiner.

Il nous faut maintenant envisager le cas où, au lieu d'avoir l'inégalité (21), on a

$$|b| < \frac{a}{2}.$$

La relation

$$-\alpha = a^2 - b^2$$

nous montre que α sera négatif et que, si l est un nombre positif tel

que l'on ait $l^2 = -\alpha$, on aura

$$l > a\sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{27}$$

Désignons par G' la fonction à laquelle se réduit la fonction G lorsque ξ se réduit à $-l^2$; on aura, comme l'a remarqué M. Poincaré dans le Mémoire déjà plusieurs fois cité,

$$0 < G' < \frac{e^{-lr}}{4\pi r},$$

d'où

$$\int_D G'^2 d\tau < \frac{1}{8\pi l}. \tag{28}$$

Le coefficient G_2 de l'unité imaginaire dans la fonction G vérifie, comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer, l'équation

$$\Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0,$$

où G_1 est la partie réelle de G, dans toute l'étendue du domaine D, exception faite du point (x_0, y_0, z_0) où cette équation n'a pas de sens. Nous aurons donc, puisque $\alpha = -l^2$,

$$\Delta G_2 - l^2 G_2 + \beta G_1 = 0.$$

On sait que la fonction G_2 reste finie, même au point (x_0, y_0, z_0), et que ses dérivées du premier ordre par rapport à (x, y, z) sont, dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0), de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$, r étant la distance des points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0). Or, il est aisé de s'assurer qu'une fonction $\psi(x, y, z)$ qui s'annule sur la frontière du domaine (D), qui reste finie et continue au point (x_0, y_0, z_0), dont les dérivées premières dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0) sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$ et qui satisfait à l'équation

$$\Delta\psi - l^2\psi + \beta G_1 = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D), sauf au point (x_0, y_0, z_0), doit forcément se confondre avec la fonction G_2. Nous aurons donc, en désignant comme plus haut par G' la fonction de Green pour $\xi = -l^2$,

$$\begin{aligned} &G_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z) \\ &\quad = \beta \int_D G_1(x_0, y_0, z_0, x', y', z')\, G'(x, y, z, x', y', z')\, d\tau, \end{aligned}$$

où $d\tau$ est l'élément de volume relatif au point (x', y', z'). On déduit de là, en tenant compte de l'inégalité évidente,

$$\int_D G_1^2\, d\tau < \int_D (G_1^2 + G_2^2)\, d\tau = 1,$$

et en s'appuyant sur l'inégalité (28),

$$|G_2| < |\beta| \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8\pi l}};$$

on aura donc, en désignant par η_1 une fonction dont le module est inférieur à 1,

$$G_2 = \frac{\beta\sqrt{1}}{\sqrt{8\pi l}}\, \eta_1.$$

D'ailleurs,

$$G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = -\frac{b}{4\pi} + g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0).$$

Il viendra donc, en désignant par η_{10} la valeur de la fonction η_1 au point (x_0, y_0, z_0),

$$g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = \frac{b}{4\pi} + \beta \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8\pi l}}\, \eta_{10}.$$

On trouve, en portant cette valeur de g_2 dans l'équation (19) et en se rappelant que $\beta = -2ab$,

$$1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8\pi l}}\, \eta_{10}.$$

d'où

$$I < \frac{1}{8\pi t},$$

d'où enfin, à l'aide de l'inégalité (27),

$$I < \frac{2}{8\pi\sqrt{3a}},$$

ce qui prouve que dans ce cas encore l'inégalité (20) sera vérifiée si H est convenablement choisi.

III. — Intégrales analogues à celles de M. Schwarz.

6. Changeons dans l'équation (3) ξ en $\xi + h$ et développons la fonction u suivant les puissances entières et positives de h, soit

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j h^j. \tag{29}$$

Les résultats établis par M. Poincaré rendent certaine la possibilité de ce développement, développement qui nous servira à trouver une limite supérieure du module de u.

J'observe que les fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots$ s'annulent toutes sur la surface (S) et qu'elles satisfont dans toute l'étendue du domaine (D) que limite la surface (S) aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u_0 + \xi u_0 + f = 0, & \\ \Delta u_j + \xi u_j + u_{j-1} = 0 & (j = 1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right. \tag{30}$$

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire de chacune des quantités que nous avons à considérer et posons à cet effet

$$\xi = \alpha + i\beta,$$
$$f = f_1 + i f_2,$$
$$u_j = P_j + i Q_j.$$

Les fonctions P_j et Q_j s'annuleront toutes sur la surface (S) et satisferont à l'intérieur de cette surface aux équations suivantes :

$$(31)\quad \begin{cases} \Delta P_0 + \alpha P_0 - \beta Q_0 + f_1 = 0, \\ \Delta Q_0 + \alpha Q_0 + \beta P_0 + f_2 = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta P_j + \alpha P_j - \beta Q_j + P_{j-1} = 0 \\ \Delta Q_j + \alpha Q_j + \beta P_j + Q_{j-1} = 0 \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Désignons par $d\tau$ un élément de volume et posons

$$(32)\qquad J_j = \int_D (P_j^2 + Q_j^2)\, d\tau.$$

On déduit des équations (31) et de la relation

$$\int_D (Q_j \Delta P_j - P_j \Delta Q_j)\, d\tau = 0,$$

l'équation

$$(33)\qquad \beta J_j = \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau.$$

On trouve d'une façon analogue, en faisant usage des relations

$$\int_D (P_{j-1} \Delta P_j - P_j \Delta P_{j-1})\, d\tau = 0$$

et

$$\int_D (Q_{j-1} \Delta Q_j - Q_j \Delta Q_{j-1})\, d\tau = 0,$$

$$\int_D P_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_D P_j P_{j-2}\, d\tau,$$

$$\int_D Q_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_D Q_j Q_{j-2}\, d\tau;$$

il vient, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$(34)\quad J_{j-1} = \int_D [P_j (P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1}) + Q_j (Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1})]\, d\tau.$$

7. Considérons pour un instant quatre fonctions quelconques φ, φ', ψ, ψ' des variables x, y, z et posons

$$L = \int_D (\varphi^2 + \psi^2)\, d\tau,$$

$$M = \int_D (\varphi\varphi' + \psi\psi')\, d\tau,$$

$$N = \int_D (\varphi'^2 + \psi'^2)\, d\tau.$$

L'intégrale suivante, où λ et λ' sont deux paramètres réels variables, ne deviendra jamais négative :

$$\int_D [(\lambda\varphi + \lambda'\varphi')^2 + (\lambda\psi + \lambda'\psi')^2]\, d\tau = \lambda^2 L + 2\lambda\lambda' M + \lambda'^2 N;$$

on aura donc

$$M^2 \leqq LN. \tag{35}$$

Soient d'abord

$$\varphi = P_j, \qquad \psi = Q_j,$$
$$\varphi' = P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1} \qquad \text{et} \qquad \psi' = Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1};$$

l'équation (34) et l'inégalité (35) nous donneront

$$J_{j-1}^2 < J_j \left[J_{j-2} - 4\beta \int_D (Q_{j-1} P_{j-2} - Q_{j-2} P_{j-1})\, d\tau + 4\beta^2 J_{j-1} \right],$$

d'où, en tenant compte de l'équation qui se déduit de l'équation (33) en y changeant j en $j-1$,

$$J_{j-1}^2 < J_j J_{j-2}. \tag{36}$$

Soient, en second lieu,

$$\varphi = P_j, \qquad \psi = Q_j, \qquad \varphi' = -Q_{j-1}, \qquad \psi' = P_{j-1};$$

il viendra, à cause de l'équation (33),

$$\beta^2 J_j^2 < J_j J_{j-1},$$

d'où

$$\beta^2 J_j < J_{j-1}. \tag{37}$$

Posons

$$J_{-1} = \int_D (f_1^2 + f_2^2)\, d\tau;$$

on verra aisément que les inégalités (36) et (37) auront lieu, même si l'on fait $j = 1$ dans la première et $j = 0$ dans la seconde. Il résulte, par conséquent, de ces inégalités que la suite

$$\frac{J_0}{J_{-1}}, \quad \frac{J_1}{J_0}, \quad \frac{J_2}{J_1}, \quad \ldots \tag{38}$$

sera croissante et convergente et qu'elle aura pour limite un nombre au plus égal à $\frac{1}{\beta^2}$; représentons ce nombre par $\frac{1}{l^2}$, où l est un nombre positif.

Je dis que l est précisément égal au rayon de convergence de la série (29). En effet, on a

$$u_0 = \int_D f\, G\, d\tau,$$

$$u_j = \int u_{j-1}\, G\, d\tau,$$

d'où il est très aisé de conclure que le rayon de convergence l' de la série (29) est au moins égal à l, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D). Soit l_1 un nombre positif aussi voisin de l' que l'on voudra, mais plus petit que ce nombre-là. On pourra trouver une constante positive A telle que l'on ait, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D),

$$|u_j| < \frac{A}{l_1^j},$$

où l_2 est un nombre vérifiant les inégalités

$$l_1 < l_2 < l',$$

mais d'ailleurs quelconque. Si donc l'on désigne par T le volume du domaine (D), on aura

$$J_j < \frac{A^2 T}{l_2^{2j}}.$$

Cela prouve que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} h^j \sqrt{J_j}$$

est au moins égal à l_2 et que, par suite, il est plus grand que l_1. D'ailleurs, ce rayon de convergence est évidemment égal à l, donc l'inégalité

$$l_1 < l'$$

entraîne l'inégalité

$$l_1 < l,$$

et cela, si petite que soit la différence $l' - l_1$. On en conclut

$$l' \leq l.$$

Or, nous avons déjà vu que

$$l \leq l',$$

donc

$$l = l'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — Possibilité du développement.

8. Considérons la suite (1) définie dans l'Introduction et proposons-nous d'estimer la valeur de la différence

$$k_{j+1} - k_j.$$

M. Poincaré a montré que l'on peut trouver une constante posi-

tive M telle que l'on ait

$$k_j > M j^{\frac{2}{3}}.$$

Cette inégalité ne permet pas d'affirmer que l'on ait, quel que soit j,

$$k_{j+1}^{\frac{3}{2}} - k_j^{\frac{3}{2}} > M^{\frac{3}{2}},$$

mais il existera certainement une suite infinie de nombres entiers et positifs croissants

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots$$

telle que l'inégalité précédente soit vérifiée sous la condition

$$j = p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est aisé de conclure de là que l'on aura

$$(39) \qquad k_{p_\nu+1} - k_{p_\nu} > \frac{M^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(k_{p_\nu+1} + k_{p_\nu})}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cela posé, je passe à la définition des contours (C_1), (C_2), (C_3), ... considérés dans l'Introduction. Soit $O\alpha$ l'axe des quantités réelles et $O\beta$ celui des quantités imaginaires dans le plan de la variable imaginaire ξ. J'appelle K_ν et K'_ν les points situés sur l'axe $O\alpha$ qui ont pour abscisses respectives k_{p_ν} et $k_{p_\nu+1}$, je désigne par B_ν le milieu du segment $K_\nu K'_\nu$ et je construis le point B'_ν qui a OB_ν pour abscisse et dont l'ordonnée, supposée positive, est déterminée par l'équation

$$(40) \qquad \overline{B_\nu B'_\nu} = \overline{OB_\nu}^{\frac{7}{8}}.$$

Désignons par B''_ν le symétrique du point B'_ν par rapport à l'axe $O\alpha$ et décrivons, en prenant le point O pour centre, un arc de cercle $B'_\nu M_\nu B''_\nu$ rencontrant la partie négative de l'axe des quantités réelles en un point M_ν. Le contour $B'_\nu M_\nu B''_\nu B_\nu B'_\nu$ sera le contour (C_ν).

9. Considérons dans le plan de la variable imaginaire ξ la branche réelle de la courbe qui a pour équation

$$\xi^8 = \alpha^7; \tag{41}$$

elle partage le plan en deux régions (R) et (R'), dont l'une (R) contient tous les arcs $B_e'M_eB_e$. Je dis que lorsque le module de ξ croît indéfiniment et lorsqu'en même temps le point qui a le paramètre ξ pour affixe ne sort pas de la région (R), la valeur asymptotique de la fonction u, intégrale de l'équation (3), est $-\frac{f}{\xi}$. En d'autres termes, dans les conditions qui viennent d'être dites, l'expression $\xi u + f$ a zéro pour limite. En effet, nous avons

$$u = \int_{(D)} f G \, d\tau,$$

d'où, puisque f s'annule sur la surface (S),

$$u = -\frac{f}{\xi} - \frac{1}{\xi} \int_{(D)} \Delta f G \, d\tau,$$

ou bien

$$u\xi + f = -\int_{(D)} \Delta f G \, d\tau;$$

par conséquent,

$$|u\xi + f| < \int_{(D)} |\Delta f| \, |G| \, d\tau,$$

ce qui donne

$$|u\xi + f|^2 < I \int |\Delta f|^2 \, d\tau, \tag{42}$$

où I représente la quantité définie par l'équation (15).

On verra aisément que, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'inégalité (20) sera applicable à partir d'une certaine valeur assez grande du module de ξ; l'inégalité (42) nous montre donc que la quantité $u\xi + f$ tend uniformément vers zéro comme il s'agissait de l'établir.

Il résulte de ce qui vient d'être démontré que l'intégrale curviligne

$$(43) \qquad \int_{\overset{\frown}{B'_\nu M_\nu B'_\nu}} u\, d\xi,$$

prise suivant l'arc de cercle $\overset{\frown}{B_\nu M_\nu B_\nu}$, a $-2\pi i f$ pour limite.

10. Il faut prouver maintenant que l'intégrale rectiligne

$$(44) \qquad \int_{\overline{B'_\nu B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi$$

a zéro pour limite lorsque ν croît indéfiniment, et pour cela il suffira évidemment de montrer qu'il en est ainsi de l'intégrale

$$(45) \qquad \int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi.$$

Désignons par β_ν la longueur arithmétique du segment $\overline{B_\nu B'_\nu}$ et soit λ la distance du point B'_ν à un point variable situé sur $\overline{B_\nu B'_\nu}$. On aura

$$(46) \qquad \left| \int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi \right| < \int_0^{\beta_\nu} |u|\, d\lambda.$$

Cherchons à déterminer une limite supérieure du module de u. La série (29) nous donne, en y remplaçant h par $-\lambda i$ et en faisant coïncider le point qui a ξ pour affixe avec le point B'_ν,

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j (-\lambda i)^j,$$

d'où

$$(47) \qquad |u| < \sum_{j=0}^{\infty} |u_j| \lambda^j.$$

D'ailleurs,

$$u_j = \int_D u_{j-1} G\, d\tau,$$

d'où

$$(48) \qquad u_j = -\frac{u_{j-1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}\int_D \Delta u_{j-1} G\, d\tau.$$

Posons

$$F = \Delta f,$$
$$w_j = \Delta u_j.$$

Il résulte des hypothèses faites au sujet de la fonction f que w_0 prendra la valeur zéro sur (S), que la quantité Δw_0 existera et que l'on aura

$$(49) \qquad \Delta w_0 + \xi w_0 + F = 0.$$

D'ailleurs, les quantités $w_1, w_2, w_3, \ldots$ s'annuleront toutes sur la surface (S) et vérifieront à l'intérieur de cette surface les équations

$$(50) \qquad \Delta w_j + \xi w_j + w_{j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit de suite que les considérations développées dans la Section III au sujet des intégrales J_j sont applicables aux intégrales

$$L_{-1} = \int_D |F|^2 d\tau,$$

$$L_j = \int_D |w_j|^2 d\tau,$$

La suite

$$(51) \qquad \frac{L_0}{L_{-1}}, \quad \frac{L_1}{L_0}, \quad \frac{L_2}{L_1}, \quad \ldots$$

sera, par conséquent, croissante et convergente. On s'assurera d'ailleurs avec la plus grande facilité que la limite de cette suite sera égale à la limite de la suite (38) en supposant, bien entendu, que ces deux suites se rapportent à une même valeur de ξ

Reportons-nous aux notations définies au n° **8** et posons

$$(52) \qquad l_\nu = \overline{B'_\nu K_\nu}.$$

Le rayon de convergence de la série (47) sera égal à l_ν; donc, en vertu de ce qui a été établi à la fin du n° **7**, la limite commune des suites (38) et (51) sera égale à $\frac{1}{l_\nu^2}$. On aura donc

$$L_j < \frac{L_{-1}}{l_\nu^{2(j+1)}}.$$

Nous concluons de là et de l'équation (48), en désignant par ρ_ν le module de ξ et en conservant à la lettre I la signification que lui assigne l'équation (15),

$$(53) \qquad |u_j| < \frac{|u_{j-1}|}{\rho_\nu} + \frac{\sqrt{\mathrm{IL}_{-1}}}{\rho_\nu l_\nu^j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Posons

$$\alpha_\nu = \overline{OB_\nu} = \frac{k_{p_\nu+1} + k_{p_\nu}}{2}.$$

Il résulte de l'inégalité (39) qu'il existera une constante positive C, telle que l'on ait

$$l_\nu^2 - \beta_\nu^2 > \frac{C}{\alpha_\nu}.$$

Si donc l'on pose

$$(54) \qquad \lambda_\nu^2 = \beta_\nu^2 + \frac{C}{\alpha_\nu}.$$

l'on aura

$$l_\nu > \lambda_\nu$$

et l'inégalité (53) nous donnera

$$(55) \qquad |u_j| < \frac{|u_{j-1}|}{\rho_\nu} + \frac{\sqrt{\mathrm{IL}_{-1}}}{\rho_\nu \lambda_\nu^j}.$$

Or, d'après ce qui a été établi au numéro précédent, il existera certainement une constante positive Λ, telle que l'on ait

$$|u_0| < \frac{\Lambda}{\rho_\nu},$$

il résulte de là, de l'inégalité (55) et de ce que les quantités

$$\frac{\lambda_\nu}{\rho_\nu} \quad \text{et} \quad 1$$

tendent vers zéro lorsque c croît indéfiniment, que l'on aura

$$(55) \qquad |u_j| < \frac{\Lambda}{\rho_\nu \lambda_\nu^j},$$

sous la seule condition

$$(56) \qquad c > n,$$

n étant un entier positif assez grand.

On conclut des inégalités (47) et (55) que sous la condition (56), l'on aura

$$|u| < \frac{\Lambda \lambda_\nu}{\rho_\nu} \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

Donc, à cause de l'inégalité (46),

$$\left| \int_{B_\nu B_\nu'} u \, d\xi \right| < \frac{\Lambda \lambda_\nu}{\rho_\nu} \log \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \beta_\nu},$$

d'où, en tenant compte de l'équation (54),

$$(57) \qquad \int_{B_\nu B_\nu'} u \, d\xi < \frac{\Lambda \lambda_\nu}{\rho_\nu} \log \frac{\lambda_\nu(\lambda_\nu + \beta_\nu)\alpha_\nu}{C}.$$

Or les quantités λ_ν et β_ν sont de l'ordre de grandeur de $\alpha_\nu^{\frac{7}{8}}$ et ρ_ν est du même ordre de grandeur que α_ν. Il suit de là que le second membre de l'inégalité (57) tend vers zéro lorsque c croît indéfiniment. Donc

lorsque v croît indéfiniment le module de l'intégrale (45) et, par suite, celui de l'intégrale (44) tendent vers zéro.

11. Les propositions établies dans les deux numéros précédents conduisent à cette conséquence que l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v} u\,d\xi,$$

a $-f(x, y, z)$ pour limite lorsque l'indice v croît indéfiniment. Cela posé, il suffit de se reporter au § XI du Mémoire, déjà si souvent cité, de M. Poincaré, pour reconnaître que, si l'on désigne par

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots \tag{58}$$

des constantes convenablement déterminées et que si l'on pose

$$W_v = \sum_{t=p_{v-1}+1}^{p_v} A_t U_t,$$

en convenant de faire $p_0 = 0$, la série

$$\sum_{v=1}^{\infty} W_v \tag{59}$$

sera uniformément convergente dans tout le domaine (D) et aura $f(x, y, z)$ pour somme. C'est le théorème énoncé dans l'Introduction. J'ajoute qu'il est aisé de conclure de la convergence uniforme de la série (59) et des propriétés de l'intégrale (2) que l'on aura

$$A_t = \int_D f U_t\,d\tau.$$

V. — Sur le problème de Dirichlet.

12. Je désire faire remarquer, en terminant ce travail, que l'on peut déduire de la méthode que j'ai donnée pour intégrer l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0 \tag{60}$$

une démonstration très simple et très générale du principe de Dirichlet.

En effet, désignons par t un nombre positif assez grand, posons $\xi = -t^2 + h$ et développons v suivant les puissances entières et positives de h. Soit

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j h^j, \tag{61}$$

on verra facilement que les fonctions v_j pourront toutes être calculées par les méthodes que j'ai exposées et que le rayon de convergence de la série (61) sera plus grand que t^2. Il suffira donc de faire, dans la série précédente, $h = t^2$ pour que la somme v de cette série représente la solution du problème de Dirichlet.

Sur une extension du calcul des substitutions linéaires;

PAR M. CYPARISSOS STÉPHANOS.

La théorie des substitutions linéaires, appliquée à l'étude des formes bilinéaires et quadratiques, a conduit, par les travaux de Cayley, Borchardt, Hesse, Laguerre et autres, à un calcul symbolique à multiplication associative, qui offre de grands avantages dans l'étude de ces théories.

On doit à M. Frobenius d'avoir présenté ce calcul sous une forme très convenable, par l'adoption de la notion de la *composition* des formes bilinéaires.

C'est de ce calcul que nous présentons une double extension dans le présent travail, en introduisant, à côté de la composition (ordinaire) des formes bilinéaires, deux autres opérations que nous désignons sous les noms de *conjonction* et de *composition bialternée* des formes bilinéaires.

La première de ces opérations, d'une définition très simple, correspond, dans le cas de deux formes bilinéaires, à un mode de composition de deux déterminants, considéré d'abord par M. Kronecker. D'après cette opération, en partant des deux formes bilinéaires

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on est conduit à une nouvelle forme bilinéaire

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}.$$

En particulier, si l'on pose $E = \Sigma x_i u_i$, $F = \Sigma y_k v_k$, on a

$$E \times F = \Sigma X_{ik} U_{ik}.$$

Notre attention, sur cette opération, a été attirée par ce fait, que *si l'on considère les déterminants*

$$|A - \lambda E|, \quad |B - \lambda F|, \quad |A \times B - \lambda E \times F|,$$

obtenus en retranchant λ *des éléments de la diagonale principale des déterminants des trois formes bilinéaires* A, B *et* $A \times B$, *l'équation* $|A \times B - \lambda E \times F| = 0$ *a pour racines les mn produits des racines de* $|A - \lambda E| = 0$ *par les racines de* $|B - \lambda F| = 0$. Comme corollaire de cette propriété, que nous avons réussi à généraliser d'une manière toute naturelle, on retrouve la formule

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m,$$

due à M. Kronecker.

La seconde opération, rappelant la multiplication alternée de Grassmann, a une relation intime avec la théorie des transformations linéaires des coordonnées pluckériennes des diverses variétés linéaires (droites, plans, etc.) contenues dans un espace à plusieurs dimensions, ou encore, si l'on veut, avec la théorie des adjointes successives d'une forme bilinéaire, obtenues en bordant le déterminant de cette forme par plusieurs séries de variables. Ainsi le produit bialterné de s formes égales à A est une forme bilinéaire A^s dont le déterminant a pour éléments les mineurs d'ordre s du déterminant de A.

Nous avons eu occasion de nous occuper de cette opération en partant de cette propriété [1], que *le déterminant* $|A^s - \lambda E^s|$, *obtenu en retranchant* λ *de tous les éléments de la diagonale principale du*

[1] Obtenue aussi par M. G. Rados, dans son article *Zur Theorie der adjungirten Substitutionen* (*Math. Annalen*, t. XLVIII, p. 417; 1896).

déterminant $|A^s|$, *a pour racines les produits des racines de l'équation* $|A - \lambda E| = 0$ *prises s à s*. Cette propriété, qui comprend comme cas particulier le fait connu, dû à M. Franke, que le déterminant $|A^s|$ est égal à la puissance $\binom{m}{s}$ de $|A|$, est également susceptible d'une généralisation intéressante.

Nous procédons à l'étude de ces opérations par une méthode uniforme, basée sur les *relations fondamentales*, très simples, qui lient ces opérations à la composition ordinaire des formes bilinéaires. Ces relations sont, du reste, équivalentes aux lois fondamentales

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1 \times \ldots \times P_1)(A_2 \times B_2 \times \ldots \times P_2)\\ = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times \ldots \times P_1 P_2\end{aligned}$$

et

$$(A_1^s)(A_2^s) = (A_1 A_2)^s$$

de certains *groupes* de transformations linéaires, importants dans la théorie des invariants [1].

Parmi les résultats du présent Travail, on voudra bien remarquer ceux touchant à la théorie de l'élimination et qui sont obtenus avec une extrême facilité. Nous donnons, entre autres, la solution générale des deux problèmes suivants :

I. *Étant données deux équations*

$$\begin{aligned}f_1(\zeta) &= \zeta^m + a_1 \zeta^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\zeta + a_m = 0,\\ f_2(\eta) &= \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\eta + b_n = 0,\end{aligned}$$

et une fonction entière $\varphi(\zeta, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \zeta^\rho \eta^\sigma$, *représenter par un déter-*

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Hurwitz *Zur Invariantentheorie* (*Math. Annalen*, t. XLV, p. 381; 1894), qui offre certains points de contact avec la présente Étude et dont nous n'avons eu connaissance qu'après l'achèvement de notre Travail. Les substitutions que M. Hurwitz appelle *Potenztransformationen*, et qui correspondent aux puissances algébriques, à exposants entiers positifs, des formes bilinéaires, peuvent conduire à des résultats analogues à ceux exposés dans le présent Travail, quoique moins simples sous certains égards.

minant d'ordre mn le résultat de l'élimination de ξ et η entre les trois équations

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0.$$

II. *Étant donnée une équation*

$$f(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière symétrique des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ $(s \leq m)$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s},$$

trouver l'équation, de degré $\binom{m}{s}$, ayant pour racines les $\binom{m}{s}$ valeurs que prend $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ pour les diverses combinaisons des racines de $f(\xi) = 0$ prises s à s.

La solution de ces problèmes et d'autres analogues est donnée par des déterminants ne contenant l'inconnue λ que dans la diagonale principale, dont les éléments sont tous de la forme $a_{ii} - \lambda$.

Enfin nous obtenons la solution du problème suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires entre les mn éléments X_{ik} d'un tableau à m lignes et à n colonnes, qui établissent des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre de ce tableau.

Nous avons cru devoir faire précéder le présent exposé par un aperçu sommaire des propriétés élémentaires de la composition des formes bilinéaires, dans le but de rendre facile l'intelligence des développements ultérieurs [1].

---

[1] *P. S.* Un aperçu des résultats du présent Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 6 mars 1899 (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 593-596).

I. — Composition ordinaire des formes bilinéaires [1].

1. Étant données deux formes bilinéaires

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

on représente par $A_1 A_2$ la forme

$$A_1 A_2 = \Sigma a'_{ig} a''_{gj} x_i u_j \qquad (g, i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

qu'on appelle *produit de la composition* des deux formes A_1 et A_2.

En particulier, si

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad E = \Sigma x_i u_i,$$

on a

$$AE = EA = A.$$

Le déterminant $|A_1 A_2|$ de la forme $A_1 A_2$ est égal au produit des déterminants

$$|A_1| = \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{mm}, \qquad |A_2| = \Sigma \pm a''_{11} a''_{22} \ldots a''_{mm}$$

des deux formes A_1 et A_2.

Les deux formes $A_1 A_2$ et $A_2 A_1$ sont en général différentes. Mais si $A_1 A_2 = A_2 A_1$, on dit que les deux formes A_1 et A_2 sont *échangeables* entre elles.

La composition des formes bilinéaires jouit pourtant des propriétés

---

[1] L'exposé suivant est conforme aux notations de M. Frobenius [*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*Journal de Crelle*, t. 84; 1878)], sauf quelques détails. On trouvera dans ce Mémoire de M. Frobenius des citations intéressantes, ainsi que dans l'article de M. Study, sur la théorie des quantités complexes, inséré dans le second fascicule de l'*Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, Leipzig, p. 169 et suivantes; 1899.

distributive et *associative*, puisqu'on a

$$(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3, \qquad A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3$$

et

$$(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3) = A_1A_2A_3.$$

En partant d'une forme A on peut considérer ses puissances successives $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... qui sont telles que

$$A^\rho A^\sigma = A^\sigma A^\rho = A^{\rho+\sigma}.$$

Dans le cas où $|A| \neq 0$, on représente par A^{-1} la forme

$$A^{-1} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma\alpha_{ij}x_iu_j.$$

Cette forme, qu'on appelle *inverse* de A, satisfait aux relations

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

On remarquera que

$$(A_1A_2\dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

2. A toute forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{ij}x_iu_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

correspond une transformation linéaire des variables x, celle qui remplace x_j par $\Sigma a_{ij}x_i$. Cette transformation linéaire peut être représentée également par le symbole A. A la forme $E = \Sigma x_iu_i$ correspond, en particulier, la substitution *identique*, qui remplace x_j par x_j.

A la composition de deux formes bilinéaires A_1 et A_2 correspond la *composition* des substitutions linéaires correspondantes. Ainsi, tandis

que A_1 remplace x_j par $\Sigma a'_{ij} x_i$ et que A_2 remplace x_j par $\Sigma a''_{ij} x_i$, la substitution $A_1 A_2$ remplace x_j par $\Sigma a'_{ig} a''_{gj} x_i = \Sigma [a''_{gj} (\Sigma a'_{ig} x_i)]$, de sorte qu'elle a le même effet que les deux substitutions A_1, A_2 effectuées successivement dans l'ordre A_2, A_1.

Dans le cas où $|A| \neq 0$, la transformation A a pour *inverse* la transformation correspondant à la forme A^{-1}.

5. De même que la forme bilinéaire

$$A = A(x, u) = \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

définit une transformation linéaire A, qui fait remplacer x_j par $\Sigma a_{ij} x_i$, de même la forme

$$A' = A'(u, x) = \Sigma a_{ij} u_j x_i,$$

qu'on appelle *transposée* de A et qui ne diffère de A que par l'*ordre* des variables x et u, définit une transformation linéaire A', qui fait remplacer u_i par $\Sigma a_{ij} u_j$, et qu'on appelle *transposée* de A.

Le produit de la composition de deux formes A'_1 et A'_2, transposées de A_1 et A_2, est donné par la formule

$$A'_1 A'_2 = \Sigma a'_{gj} a''_{ig} u_j x_i,$$

de sorte qu'on a

$$A'_1 A'_2 = (A_2 A_1)'.$$

On a, de même, en particulier,

$$A' E' = E' A' = A'.$$

Au produit $A'_1 A'_2$ des formes bilinéaires A'_1 et A'_2 correspond également le produit de la composition des transformations A'_1 et A'_2 correspondantes, effectuée dans l'ordre A'_1, A'_2. La transformation identique de ce groupe correspond à la forme E'.

L'inverse de A' coïncide avec la transposée de $A^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} x_i u_j$, c'est-à-dire que l'on a

$$(A')^{-1} = (A^{-1})' = \Sigma \alpha_{ij} u_j x_i.$$

La transformation $A'^{-1} = (A^{-1})'$ est appelée substitution *contragrédiente* (ou *contraire*) de A. La substitution A^{-1} est évidemment la contragrédiente de A' et $A_1'^{-1} A_2'^{-1}$ la contragrédiente de $A_1 A_2$.

4. Si dans la forme $A = A(x, u)$ on soumet les variables x à une substitution A_1 et les variables u à une substitution A_2' on obtient comme résultat la forme $A_1 A A_2$. Par les mêmes substitutions la forme A' devient

$$A_2' A' A_1' = (A_1 A A_2)'.$$

Pour que deux substitutions A_1 et A_2' transforment en elle-même la forme E, il faut et il suffit qu'elles soient contragrédientes.

En effet, de la relation

$$A_1 E A_2 = E,$$

soit

$$A_1 A_2 = E,$$

on déduit que

$$|A_1||A_2| \neq 0$$

et que

$$A_2 = A_1^{-1},$$

d'où

$$A_2' = A_1'^{-1} = (A^{-1})'.$$

5. Si l'on soumet les variables x et u de deux formes A_1 et A_2 à deux transformations A_3 et A_4', on obtient deux nouvelles formes

$$A_3 A_1 A_4 \quad \text{et} \quad A_3 A_2 A_4$$

dont le produit $A_3 A_1 A_4 A_3 A_2 A_4$ ne coïncide pas, en général, avec la forme $A_3 A_1 A_2 A_4$, obtenue en soumettant $A_1 A_2$ aux mêmes transformations A_3 et A_4'.

Pourtant si $|A_3||A_4| \neq 0$ et que l'on veuille avoir

$$A_3 A_1 A_4 A_3 A_2 A_4 = A_3 A_1 A_2 A_4$$

quelles que soient les formes A_1 et A_2, on doit avoir $A_4 A_3 = E$, c'est-

à-dire que les deux transformations A_3 et A_4 doivent être contragrédientes.

On voit par là que le produit $A_1 A_2$ de deux formes bilinéaires A_1 et A_2 quelconques ne constitue un *covariant* de ces formes que dans le cas où l'on considère dans ces formes les u comme des variables contragrédientes aux variables x.

6. L'équation $|A - \lambda E| = 0$ est appelée *équation caractéristique* de la forme A.

Toute forme $A_1 A A_1^{-1}$, transformée de A par des substitutions contragrédientes A_1 et A_1^{-1}, a la même équation caractéristique que A. On a, en effet,

$$\begin{aligned} |A_1 A A_1^{-1} - \lambda E| &= |A_1 A A_1^{-1} - \lambda A_1 E A_1^{-1}| \\ &= |A_1 (A - \lambda E) A_1^{-1}| = |A_1| \, |A_1|^{-1} |A - \lambda E| = |A - \lambda E|. \end{aligned}$$

On voit par là que tous les coefficients de l'équation $|A - \lambda E|$ sont des invariants de la forme A, si l'on y considère les u comme des variables contragrédientes aux variables x.

Soit $\omega(\lambda)$ le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $m - 1$ du déterminant $|A - \lambda E|$ et posons

$$\psi(\lambda) = \frac{|A - \lambda E|}{\omega(\lambda)}.$$

Dans le cas où l'équation $\psi(\lambda) = 0$ n'a que des racines simples, la forme A peut être mise, au moyen de substitutions A_1 et A_1^{-1} convenables, sous la forme canonique

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_i x_i u_i.$$

(Il en est ainsi, en particulier, dans le cas où l'équation $|A - \lambda E| = 0$ a toutes ses racines inégales.)

Au moyen de cette expression canonique on voit que, si l'on considère une fonction entière quelconque

$$\varphi(A) = \Sigma c_p A^p$$

de la forme A, on aura

$$A_1 \varphi(A) A_1^{-1} = \Sigma \varphi(\xi_i) x_i u_i,$$

d'où l'on déduit que l'équation caractéristique $|\varphi(A) - \lambda E| = 0$ de la forme $\varphi(A)$ a pour racines les m valeurs de $\varphi(\xi_i)$.

Cette conclusion subsiste pourtant dans tous les cas, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ désignant les racines de $|A - \lambda E| = 0$.

II. — Conjonction des formes bilinéaires.

7. Étant données deux formes bilinéaires

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B = \Sigma b_{kl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut en déduire une nouvelle forme bilinéaire

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

en remplaçant, dans le produit algébrique

$$(\Sigma a_{ij} x_i u_j)(\Sigma b_{kl} y_k v_l) = \Sigma a_{ij} b_{kl} x_i y_k u_j v_l$$

de ces formes, les expressions $x_i y_k$, $u_j v_l$ par les variables X_{ik}, U_{jl}.

En posant

$$E = \Sigma x_i u_i, \qquad F = \Sigma y_k v_k$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura, de même,

$$A \times F = \Sigma a_{ij} (X_{i1} U_{j1} + X_{i2} U_{j2} + \ldots + X_{in} U_{jn}),$$
$$E \times B = \Sigma b_{kl} (X_{1k} U_{1l} + X_{2k} U_{2l} + \ldots + X_{mk} U_{ml}),$$
$$E \times F = \Sigma X_{ik} U_{ik}.$$

La forme bilinéaire $A \times B$ peut être considérée comme une sorte de produit de la composition des deux formes A et B.

Pour distinguer cette nouvelle sorte de composition des formes bilinéaires de la composition ordinaire, nous l'appellerons *conjonction* des formes bilinéaires.

A cette composition des formes A et B correspond une sorte de composition de leurs déterminants $|A|$ et $|B|$, par laquelle on est conduit au nouveau déterminant à mn lignes

$$|A \times B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & \dots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2n} & a_{12}b_{21} & \dots & a_{1m}b_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{11}b_{n1} & a_{11}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{nn} & a_{12}b_{n1} & \dots & a_{1m}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{11} & \dots & a_{2m}b_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1}b_{n1} & a_{m1}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{nn} & a_{m2}b_{n1} & \dots & a_{mm}b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant l'élément appartenant à la ligne $(i-1)n+k$ et à la colonne $(j-1)n+l$ est égal à $a_{ij}b_{kl}$.

8. Si l'on pose

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$
$$B_1 = \Sigma b'_{kl} y_k v_l, \qquad B_2 = \Sigma b_{kl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

les produits A_1A_2, B_1B_2, obtenus par la composition ordinaire des formes bilinéaires, dont il a été question dans le Chapitre précédent, seront

$$A_1A_2 = \Sigma a'_{ig} a_{gj} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$
$$B_1B_2 = \Sigma b'_{kh} b'_{hl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

et l'on aura

$$A_1A_2 \times B_1B_2 = \Sigma a'_{ig} a_{ig} b_{kh} b_{hl} x_{ik} u_{jl}.$$

De même, le produit ordinaire des deux formes bilinéaires

$$A_1 \times B_1 = \Sigma a'_{ij} b'_{kl} X_{ik} U_{jl},$$
$$A_2 \times B_2 = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

sera

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = \Sigma a'_{ig} b'_{kh} a_{gj} b'_{hl} X_{ik} U_{jl}.$$

On voit par là que la conjonction des formes bilinéaires est liée à la composition ordinaire de ces formes par la relation

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2.$$

Cette relation joue un rôle fondamental dans la théorie qui nous occupe, puisqu'elle conduit à toutes les propriétés de la conjonction des formes bilinéaires.

Et d'abord signalons, parmi les cas particuliers de cette *relation fondamentale*, les suivants :

$$(A \times F)(E \times B) = (E \times B)(A \times F) = A \times B,$$
$$(A_1 \times F)(A_2 \times F) = A_1 A_2 \times F,$$
$$(E \times B_1)(E \times B_2) = E \times B_1 B_2,$$

dont on peut déduire réciproquement la relation fondamentale.

Remarquons aussi que l'on a

$$(A \times B)(E \times F) = (E \times F)(A \times B) = A \times B.$$

Du reste, il est clair que l'on a aussi la *propriété distributive*

$$(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B,$$
$$A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2.$$

9. La relation

$$(A \times F)(E \times B) = A \times B$$

fait voir que

$$|A \times F||E \times B| = |A \times B|.$$

Mais comme on a évidemment

$$|A \times F| = |A|^n,$$
$$|E \times B| = |B|^m,$$

on obtient la formule connue, due à M. Kronecker [1],

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m.$$

10. La relation fondamentale

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2$$

conduit aussi aux formules

$$(A \times B)^\rho = A^\rho \times B^\rho,$$
$$(A \times F)^\rho = A^\rho \times F,$$
$$(E \times B)^\sigma = E \times B^\sigma,$$
$$(A \times F)^\rho (E \times B)^\sigma = A^\rho \times B^\sigma.$$

Ces formules ont lieu pour toutes les valeurs positives entières des exposants ρ et σ, quelles que soient les formes A et B. Pourtant la première de ces relations a lieu, même pour des valeurs négatives de ρ, dans le cas où $|A| \neq 0$ et $|B| \neq 0$, tandis que les trois dernières subsistent pour $\rho < 0$, si $|A| \neq 0$, et pour $\sigma < 0$, si $|B| \neq 0$.

Ainsi, par exemple, dans le cas où $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, on a

$$(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1},$$

puisque

$$(A \times B)(A^{-1} \times B^{-1}) = (A^{-1} \times B^{-1})(A \times B) = E \times F.$$

Si l'on donne une fonction entière de ξ et η

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma,$$

---

[1] *Voir* l'article *Kombinatorik*, par M. Netto, dans le premier fascicule de l'*Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, p. 40.

on aura

$$\varphi(A \times F, E \times B) = \Sigma c_{\rho\sigma}(A \times F)^{\rho}(E \times B)^{\sigma}$$
$$= \Sigma c_{\rho\sigma} A^{\rho} \times B^{\sigma}.$$

La forme bilinéaire $\varphi(A \times F, E \times B)$ peut donc être représentée plus simplement par le symbole

$$\varphi(A ; B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^{\rho} \times B^{\sigma}.$$

Toutes les formes $\varphi(A ; B)$, correspondant à deux formes A et B données, sont échangeables entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi_1(A ; B)\varphi_2(A ; B) = \varphi_2(A ; B)\varphi_1(A ; B).$$

Cette propriété résulte de la relation

$$(A^{\rho_1} \times B^{\sigma_1})(A^{\rho_2} \times B^{\sigma_2}) = (A^{\rho_2} \times B^{\sigma_2})(A^{\rho_1} \times B^{\sigma_1}) = A^{\rho_1+\rho_2} \times B^{\sigma_1+\sigma_2}.$$

11. Si, en partant de deux formes

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m ; \; k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

telles que $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, et ayant pour inverses

$$A^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} x_i u_j, \qquad B^{-1} = \Sigma \beta_{kl} y_k v_l,$$

on considère les deux formes

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

et

$$A^{-1} \times B^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} \beta_{kl} X_{ik} U_{jl},$$

on remarque, qu'en vertu de la relation

$$A^{-1} \times B^{-1} = (A \times B)^{-1},$$

la forme $A^{-1} \times B^{-1}$ coïncide avec l'inverse de $A \times B$.

Ainsi, tandis que les deux substitutions A et B remplacent x_j par $\Sigma a_{ij}x_i$ et y_l par $\Sigma b_{kl}y_k$, et que leurs inverses A^{-1} et B^{-1} remplacent x_j par $\Sigma \alpha_{ij}x_i$ et y_l par $\Sigma \beta_{kl}y_k$, la substitution $A \times B$ remplace X_{jl} par $\Sigma a_{ij}b_{kl}X_{ik}$ (et en particulier $x_j y_l$ par $\Sigma a_{ij}x_i \Sigma b_{kl}y_k$) et son inverse $A^{-1} \times B^{-1}$ remplace X_{jl} par $\Sigma \alpha_{ij}\beta_{kl}X_{ik}$ (et $x_j y_l$ par $\Sigma \alpha_{ij}x_i \Sigma \beta_{kl}y_k$).

De même, tandis que les transformations contragrédientes A'^{-1} et B'^{-1} de A et B remplacent respectivement u_i par $\Sigma \alpha_{ij}u_j$ et v_k par $\Sigma \beta_{kl}v_l$, la transformation contragrédiente $(A \times B)'^{-1} = A'^{-1} \times B'^{-1}$ de $A \times B$ remplace U_{ik} par $\Sigma \alpha_{ij}\beta_{kl}U_{jl}$ (et $u_i v_k$ par $\Sigma \alpha_{ij}u_i \Sigma \beta_{kl}v_l$).

12. Si, étant données deux formes

$$A = \Sigma a_{ij}x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl}y_k v_l,$$

on y soumet les variables x et u à deux substitutions contragrédientes A_1 et $A_1'^{-1}$, et les variables y et v à deux autres substitutions contragrédientes B_1 et $B_1'^{-1}$, on obtient deux nouvelles formes bilinéaires $A_1 A A_1'^{-1}$, $B_1 B B_1'^{-1}$ dont le produit

$$A_1 A A_1'^{-1} \times B_1 B B_1'^{-1}$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)'^{-1},$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B$ aux deux substitutions contragrédientes $A_1 \times B_1$ et $(A_1 \times B_1)'^{-1}$, opérées sur les variables X et Y.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)'^{-1} \\ = (A_1 A \times B_1 B)(A_1'^{-1} \times B_1'^{-1}) \\ = A_1 A A_1'^{-1} \times B_1 B B_1'^{-1}.\end{aligned}$$

La proposition précédente n'est qu'un cas particulier de celle-ci :

Si dans les formes A et B on soumet les variables x, u, y, v respectivement aux substitutions A_1, A_2', B_1, B_2', on obtient deux nou-

celles formes bilinéaires $A_1 A A_2$, $B_1 B B_2$ *dont le produit*

$$A_1 A A_2 \times B_1 B B_2$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_2 \times B_2),$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B$ *aux substitutions* $A_1 \times B_1$ *et* $(A_2 \times B_2)' = A'_2 \times B'_2$, *opérées respectivement sur les variables* X *et* U.

15. Si les substitutions A_1, A_1' et B_1, B_1' transforment A et B respectivement en

$$A_1 A A_1' = \Sigma \xi_i x_i u_i,$$
$$B_1 B B_1' = \Sigma \eta_{\lambda} y_{\lambda} v_{\lambda},$$

les substitutions $A_1 \times B_1$ et $(A_1 \times B_1)^{-1}$, qui sont contragrédientes entre elles, transforment $A \times B$ et $A^{\rho} \times B^{\sigma}$ respectivement en

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)' &= A_1 A A_1' \times B_1 B B_1' \\ &= \Sigma \xi_i \eta_{\lambda} X_{i\lambda} U_{i\lambda}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A^{\rho} \times B^{\sigma})(A_1 \times B_1)' &= A_1 A^{\rho} A_1' \times B_1 B^{\sigma} B_1' \\ &= \Sigma \xi_i^{\rho} \eta_{\lambda}^{\sigma} X_{i\lambda} U_{i\lambda},\end{aligned}$$

et plus généralement la forme

$$\varphi(A : B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^{\rho} \times B^{\sigma}$$

en

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)\varphi(A : B)(A_1 \times B_1)' &= \Sigma c_{\rho\sigma} A_1 A^{\rho} A_1' \times B_1 B^{\sigma} B_1' \\ &= \Sigma c_{\rho\sigma} \xi_i^{\rho} \eta_{\lambda}^{\sigma} X_{i\lambda} U_{i\lambda} \\ &= \Sigma \varphi(\xi_i, \eta_{\lambda}) X_{i\lambda} U_{i\lambda}.\end{aligned}$$

On déduit de là que, de même que (n° 6),

$$|A - \lambda E| = |A_1 A A_1' - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda),$$
$$|B - \lambda E| = |B_1 B B_1' - \lambda E| = \Pi(\eta_{\lambda} - \lambda),$$

ou à

$$|A^\rho \times B^\sigma - \lambda E \times F| = |(A_1 \times B_1)(A^\rho \times B^\sigma)(A_1 \times B_1)^{-1} - \lambda E \times F|$$
$$= \Pi(\xi_i^\rho \eta_{ik}^\sigma - \lambda)$$

et, en général,

$$|\varphi(A; B) - \lambda E \times F| = \Pi|\varphi(\xi_i, \eta_k) - \lambda|.$$

Ces propriétés, démontrées ici pour le cas où les formes A et B peuvent prendre la forme canonique $\Sigma \xi_i x_i u_i$ et $\Sigma \eta_k y_k v_k$, subsistent dans tous les cas, pour des raisons de continuité.

On parvient ainsi au résultat important suivant :

Si l'on pose

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma, \qquad \varphi(A; B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^\rho \times B^\sigma,$$

l'équation caractéristique

$$|\varphi(A; B) - \lambda E_1 \times F| = 0$$

de la forme $\varphi(A; B)$ *a pour racines les mn valeurs que prend* $\varphi(\xi_i, \eta_k)$ *pour les divers couples de racines* ξ_i *et* η_k *des équations*

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad \text{et} \qquad |B - \lambda E| = 0.$$

En d'autres termes :

Le résultant de l'élimination de ξ *et* η *entre les trois équations*

$$|A - \xi E| = 0, \qquad |B - \eta F| = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0,$$

est représenté par le déterminant d'ordre mn

$$|\varphi(A; B) - \lambda E \times F|.$$

En dehors des cas particuliers de ces propositions correspondant à $\varphi(\xi, \eta)$ égal à $\xi\eta$ ou à $\xi^\rho \eta^\sigma$, remarquons aussi ceux où l'expression

$\varphi(\xi, \eta)$ devient égale à $\xi + \eta$ ou à $\xi - \eta$. On a alors [1]

$$|A \times B - \lambda E \times F| = H(\xi_i \eta_k - \lambda),$$
$$|A \times F + E \times B - \lambda E \times F| = H(\xi_i + \eta_k - \lambda),$$
$$|A \times F - E \times B - \lambda E \times F| = H(\xi_i - \eta_k - \lambda).$$

Le fait que

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m$$

peut être considéré comme un corollaire de la première de ces formules.

Remarquons enfin que, *de même que le résultant de l'élimination de λ entre $|A - \lambda E| = 0$ et $|B - \lambda F| = 0$ est $|A \times F - E \times B|$, de même le résultant de l'élimination de λ entre $|A_1 - \lambda A_2| = 0$ et $|B_1 - \lambda B_2| = 0$ est $|A_1 \times B_2 - A_2 \times B_1|$.*

14. La théorie précédente peut servir, si l'on veut, à la résolution du problème suivant :

Étant donnés deux polynômes

$$f_1(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1} \xi + a_m,$$
$$f_2(\eta) = \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \eta + b_n$$

et une fonction entière quelconque

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma,$$

trouver le résultant de l'élimination de ξ et η entre les trois équations

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0.$$

---

[1] Nous avons donné la première de ces formules dans une Note *Sur un mode de composition des déterminants et des formes bilinéaires* parue dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini* (vol. 36; 1899).

En effet, si l'on représente par A et B les deux formes bilinéaires

$$\begin{aligned} A = &- a_1 x_1 u_1 - a_2 x_1 u_2 - \ldots - a_{m-1} x_1 u_{m-1} - a_m x_1 u_m \\ &+ x_2 u_1 + x_3 u_2 + \ldots + x_m u_{m-1}, \\ B = &- b_1 y_1 v_1 - b_2 y_2 v_1 - \ldots - b_{n-1} y_{n-1} v_1 - b_n y_n v_1 \\ &+ y_1 v_2 + y_2 v_3 + \ldots + y_{n-1} v_n, \end{aligned}$$

on aura

$$|A - \xi E| = (-1)^m f_1(\xi), \qquad |B - \eta_1 F| = (-1)^n f_2(\eta_1).$$

On voit par là que

Le résultant de l'élimination de ξ et η_1 entre les trois équations

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta_1) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta_1) - \lambda = 0$$

sera donné sous la forme

$$|\varphi(A; B) - \lambda E \times F|.$$

En particulier, le résultant des deux polynômes $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ sera $|A \times F - E \times B|$.

Au lieu de la valeur précédente de B, on peut prendre

$$\begin{aligned} B = &- b_1 y_1 v_1 - b_2 y_1 v_2 - \ldots - b_{n-1} y_1 v_{n-1} - b_n y_1 v_n \\ &+ y_2 v_1 + y_3 v_2 + \ldots + y_n v_{n-1}; \end{aligned}$$

pourtant les résultats auxquels on arrive ainsi présentent moins de symétrie.

15. La relation fondamentale

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2$$

exprime ce fait important que *les substitutions* $A \times B$ *forment un groupe*, le produit de la composition de deux transformations $A_2 \times B_2$,

$A_1 \times B_1$ de ce groupe coïncidant avec la transformation

$$A_1 A_2 \times B_1 B_2 \text{ (}^1\text{)}.$$

La transformation identique de ce groupe correspond à la forme $E \times F$.

Ce groupe comprend deux sous-groupes remarquables : celui des substitutions $A \times F$ et celui des substitutions $E \times B$. Les substitutions de chacun de ces sous-groupes sont échangeables aux substitutions de l'autre. Toute transformation $A \times B$ est le produit des deux substitutions $A \times F$, $E \times B$, appartenant à ces deux sous-groupes.

16. Les substitutions du groupe $A \times B$ ont la propriété d'opérer des transformations linéaires entre les déterminants et les sous-déterminants du Tableau

$$\begin{matrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots & \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots & \lambda_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{m1}, & \lambda_{m2}, & \ldots & \lambda_{mn}. \end{matrix}$$

Ainsi, par exemple, la substitution $A \times F$ remplace le déterminant d'ordre s

$$\begin{vmatrix} \lambda_{i_1 i_1} & \lambda_{i_1 i_2} & \ldots & \lambda_{i_1 i_s} \\ \lambda_{i_2 i_1} & \lambda_{i_2 i_2} & \ldots & \lambda_{i_2 i_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{i_s i_1} & \lambda_{i_s i_2} & \ldots & \lambda_{i_s i_s} \end{vmatrix} = \lambda_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_s \\ i_1 i_2 \ldots i_s}},$$

par l'expression

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{\alpha_{i_1}} \lambda_{\alpha i_1} & \Sigma a_{\alpha_{i_1}} \lambda_{\alpha i_2} & \ldots & \Sigma a_{\alpha_{i_1}} \lambda_{\alpha i_s} \\ \Sigma a_{\alpha_{i_2}} \lambda_{\alpha i_1} & \Sigma a_{\alpha_{i_2}} \lambda_{\alpha i_2} & \ldots & \Sigma a_{\alpha_{i_2}} \lambda_{\alpha i_s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma a_{\alpha_{i_s}} \lambda_{\alpha i_1} & \Sigma a_{\alpha_{i_s}} \lambda_{\alpha i_2} & \ldots & \Sigma a_{\alpha_{i_s}} \lambda_{\alpha i_s} \end{vmatrix}$$

(1) Cette propriété a déjà été remarquée par M. HURWITZ (*Math. Annalen*, t. XLV, p. 389).

qui est égale à la somme des produits des déterminants correspondants des deux Tableaux

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{2j_1} & \dots & a_{mj_1} \\ a_{1j_2} & a_{2j_2} & \dots & a_{mj_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j_s} & a_{2j_s} & \dots & a_{mj_s} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \Sigma_{1i_1} & \Sigma_{2i_1} & \dots & \Sigma_{mi_1} \\ \Sigma_{1i_2} & \Sigma_{2i_2} & \dots & \Sigma_{mi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{1i_s} & \Sigma_{2i_s} & \dots & \Sigma_{mi_s} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire égale à

$$\Sigma a^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_s} \Sigma^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_s} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 < \dots < i_s).$$

De même, la substitution $E \times B$ remplace le déterminant

$$\Sigma^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_s}$$

par l'expression

$$\begin{vmatrix} \Sigma b_{kj_1} \Sigma_{i_1 k} & \Sigma b_{kj_2} \Sigma_{i_1 k} & \dots & \Sigma b_{kj_s} \Sigma_{i_1 k} \\ \Sigma b_{kj_1} \Sigma_{i_2 k} & \Sigma b_{kj_2} \Sigma_{i_2 k} & \dots & \Sigma b_{kj_s} \Sigma_{i_2 k} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \Sigma b_{kj_1} \Sigma_{i_s k} & \Sigma b_{kj_2} \Sigma_{i_s k} & \dots & \Sigma b_{kj_s} \Sigma_{i_s k} \end{vmatrix}$$

qui est égale à la somme des produits des déterminants correspondants des deux Tableaux

$$\begin{vmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_1} & \dots & b_{nj_1} \\ b_{1j_2} & b_{2j_2} & \dots & b_{nj_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1j_s} & b_{2j_s} & \dots & b_{nj_s} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \Sigma_{i_1 1} & \Sigma_{i_1 2} & \dots & \Sigma_{i_1 n} \\ \Sigma_{i_2 1} & \Sigma_{i_2 2} & \dots & \Sigma_{i_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{i_s 1} & \Sigma_{i_s 2} & \dots & \Sigma_{i_s n} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire égale à

$$\Sigma b^{k_1 k_2 \dots k_s}_{i_1 i_2 \dots i_s} \Sigma^{i_1 i_2 \dots i_s}_{k_1 k_2 \dots k_s} \qquad (\text{où } k_1 < k_2 < \dots < k_s).$$

Quant à la substitution $A \times B$, comme elle est le produit de la composition des substitutions $A \times F$ et $E \times B$, elle fait remplacer $\Sigma^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_s}$

par l'expression

$$\Sigma a_{i_1 i_2 \ldots i_t}^{k_1 k_2 \ldots k_t} b_{k_1 k_2 \ldots k_t}^{l_1 l_2 \ldots l_t} X_{k_1 k_2 \ldots k_t}^{i_1 i_2 \ldots i_t} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 < \ldots < i_t,\ k_1 < k_2 < \ldots < k_t).$$

En particulier, dans le cas où $m = n$, la transformation $A \times B$ remplace le déterminant $|X| = \Sigma \pm X_{11} X_{22} \ldots X_{mm}$ par le produit

$$|A||B||X|.$$

17. En partant des deux formes

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on aurait pu aussi poser

$$A' \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} Y_{jk} V_{il}.$$

On aurait alors la relation fondamentale

$$(A'_1 \times B_1)(A'_2 \times B_2) = A'_1 A'_2 \times B_1 B_2,$$

où

$$A'_1 A'_2 = (A_2 A_1)'.$$

Les résultats auxquels on arrive ainsi sont tout à fait analogues à ceux relatifs à l'opération de conjonction entre formes bilinéaires, déjà examinée. L'analogie parfaite des propriétés de ces deux genres d'opérations provient de ce que, d'après le n° **12**, la forme $A \times B$ peut être considérée comme un covariant des formes A et B, quelles que soient les substitutions linéaires auxquelles on veut soumettre les variables x, y, u, v.

Voici, par exemple, une des propriétés de l'opération actuelle :

Si l'on soumet les formes A' et B aux substitutions A_1, A_2, B_1, B_2, opérées respectivement sur les variables u, x, y, v, on obtient deux nouvelles formes

$$A'_1 A' A'_2, \quad B_1 B B_2$$

dont le produit $A_1 A' A'_2 \times B_1 B B_2$ coïncide avec la forme

$$(A'_1 \times B_1)(A' \times B)(A'_2 \times B_2).$$

obtenue en soumettant les variables X et Y de la forme $A' \times B$ aux transformations $A'_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$.

Dans le cas où les substitutions A'_1 et A_2, B_1 et B'_2 sont contragrédientes, il en est de même pour les substitutions $A'_1 \times B_1$ et $A_2 \times B'_2$.

Les opérations $A' \times B$ forment également un groupe dont les propriétés sont tout à fait analogues à celles du groupe $A \times B$.

Du reste, il est à remarquer que l'on a

$$|A \times B - \lambda E \times F| = |A' \times B - \lambda E' \times F|,$$
$$|A^2 \times B^2 - \lambda E \times F| = |A'^2 \times B^2 - \lambda E' \times F|,$$

et, en général,

$$|\varphi(A : B) - \lambda E \times F| = |\varphi(A' : B) - \lambda E' \times F|.$$

18. La théorie précédente peut aussi être étendue, sans difficulté, à des produits $A \times B \times C \times \ldots$ de plusieurs formes

$$\begin{aligned} A &= \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \\ B &= \Sigma b_{kl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \\ C &= \Sigma_{pq} z_p w_q \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, r), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous nous bornerons ici à indiquer sommairement les principaux résultats relatifs aux cas du produit de la conjonction de trois formes

$$A \times B \times C = \Sigma a_{ij} b_{kl} c_{pq} X_{ikp} U_{jlq}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m; k, l = 1, 2, \ldots, n; p, q = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on pose

$$E = \Sigma x_i u_i, \qquad F = \Sigma y_k v_k, \qquad G = \Sigma z_p w_p,$$

on a

$$E \times F \times G = \Sigma X_{ikp} U_{ikp}.$$

Ici encore on a les relations fondamentales

$$(A_1 \times B_1 \times C_1)(A_2 \times B_2 \times C_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times C_1 C_2,$$

d'où l'on déduit

$$(A \times B \times C)(E \times F \times G) = (E \times F \times G)(A \times B \times C) = A \times B \times C,$$
$$(A \times F \times G)(E \times B \times G)(E \times F \times C) = \ldots = A \times B \times C,$$
$$(A_1 \times B_1 \times G)(A_2 \times B_2 \times G) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times G, \ldots,$$
$$(A_1 \times F \times G)(A_2 \times F \times G) = A_1 A_2 \times F \times G, \ldots,$$

et aussi

$$(A \times B \times C)^\rho = A^\rho \times B^\rho \times C^\rho,$$
$$(A \times B \times G)^\rho = A^\rho \times B^\rho \times G, \ldots,$$
$$(A \times F \times G)^\rho = A^\rho \times F \times G, \ldots,$$
$$(A \times F \times G)^\rho (E \times B \times G)^\sigma (E \times F \times C)^\tau = A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau.$$

Si l'on donne une fonction entière de ξ, η, ζ,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} \xi^\rho \eta^\sigma \zeta^\tau,$$

on aura

$$\begin{aligned} &\varphi(A \times F \times G, E \times B \times G, E \times F \times C) \\ &\quad = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} (A \times F \times G)^\rho (E \times B \times G)^\sigma (E \times F \times C)^\tau \\ &\quad = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau, \end{aligned}$$

et l'on pourra poser, plus simplement,

$$\varphi(A; B; C) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau.$$

Les formes $\varphi(A; B; C)$, correspondant à des formes A, B, C données, sont échangeables entre elles.

On a dans le cas actuel

$$(A \times B \times C) = (A^{mr} B^{mr} C^{mn}).$$

Étant données trois formes A, B, C, si l'on y soumet les variables u, v, w, x, y, z respectivement aux transformations A_1, A_2, B_1, B_2,

C_1, C'_2, on obtient trois nouvelles formes dont le produit

$$A_1 A A_2 + B_1 B B_2 + C_1 C C_2$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1 \times C_1)(A \times B \times C)(A_2 \times B_2 \times C_2),$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B \times C$ aux substitutions

$$A_1 \times B_1 \times C_1 \quad \text{et} \quad (A_2 \times B_2 \times C_2)' = A'_2 \times B'_2 \times C'_2$$

opérées respectivement sur les variables X et U.

Dans le cas où les substitutions A'_2, B'_2, C'_2 sont les contragrédientes de A_1, B_1, C_1 respectivement, la substitution $A'_2 \times B'_2 \times C'_2$ est la contragrédiente de $A_1 \times B_1 \times C_1$.

Si l'on pose

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} \xi^\rho \eta^\sigma \zeta^\tau,$$
$$\varphi(A; B; C) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau,$$

l'équation caractéristique de la forme $\varphi(A; B; C)$ *a pour racines les mnr valeurs de* $\varphi(\xi_i, \eta_k, \zeta_p)$, *correspondant aux divers triples de racines* ξ_i, η_k, ζ_p *des trois équations*

$$|A - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda) = 0,$$
$$|B - \lambda F| = \Pi(\eta_k - \lambda) = 0,$$
$$|C - \lambda G| = \Pi(\zeta_p - \lambda) = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$|\varphi(A; B; C) - \lambda E \times F \times G| = \Pi[\varphi(\xi_i, \eta_k, \zeta_p) - \lambda].$$

En d'autres termes :

Le résultant de l'élimination de ξ, η, ζ *entre les quatre équations*

$$|A - \xi E| = 0, \qquad |B - \eta F| = 0, \qquad |C - \zeta G| = 0,$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \lambda = 0,$$

est représenté par le déterminant d'ordre mnr

$$|\varphi(A; B; C) - \lambda E \times F \times G|.$$

On a, en particulier,

$$|A \times B \times C - \lambda E \times F \times G| = \Pi(\xi_i \eta_k \zeta_p - \lambda),$$
$$|A \times B \times G + A \times F \times C + E \times B \times C - \lambda E \times F \times G|$$
$$= \Pi(\xi_i \eta_k + \xi_i \zeta_p + \eta_k \zeta_p - \lambda),$$
$$|A \times F \times G + E \times B \times G + E \times F \times C - \lambda E \times F \times G|$$
$$= \Pi(\xi_i + \eta_k + \zeta_p - \lambda).$$

La relation fondamentale

$$(A_1 \times B_1 \times C_1)(A_2 \times B_2 \times C_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times C_1 C_2$$

exprime que les transformations $A \times B \times C$ forment un groupe.

III. — Composition bialternée des formes bilinéaires.

19. Étant données deux formes bilinéaires

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

représentons par le symbole $A_1.A_2$ la forme

$$A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{i_1 j_1} a''_{i_2 j_2} x_{i_1 i_2} u_{j_1 j_2},$$

étant posé

$$x_{i_1 i_2} = x'_{i_1} x''_{i_2} - x'_{i_2} x''_{i_1}, \qquad u_{j_1 j_2} = u'_{j_1} u''_{j_2} - u'_{j_2} u''_{j_1}.$$

On aura, de même,

$$A.A = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} x_{i_1 i_2} u_{j_1 j_2},$$
$$A.E = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{ij}(x_{i1} u_{j1} + x_{i2} u_{j2} + \ldots + x_{im} u_{jm}),$$
$$E.E = \tfrac{1}{2}\Sigma x_{i_1 i_2} u_{i_1 i_2},$$

où

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad E = \Sigma x_i u_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

En posant

$$A = f(x, u), \qquad A_1 = f_1(x, u), \qquad A_2 = f_2(x, u)$$

on a

$$A_1 . A_2 = \tfrac{1}{2} [f_1(x', u') f_2(x'', u'') - f_1(x', u'') f_2(x'', u') \\ - f_1(x'', u') f_2(x', u'') + f_1(x'', u'') f_2(x', u')]$$

et

$$A . A = f(x', u') f(x'', u'') - f(x', u'') f(x'', u').$$

Il est par là clair que l'on a la propriété distributive

$$(A_1 + A_2) . A_3 = A_1 . A_3 + A_2 . A_3, \quad A_1 . (A_2 + A_3) = A_1 . A_2 + A_1 . A_3,$$

ainsi que la propriété commutative

$$A_1 . A_2 = A_2 . A_1.$$

La forme $A_1 . A_2$, comme changeant de signe par la permutation de x' et x'', ainsi que de u' et u'', peut être appelée *produit bialternié* des formes A_1 et A_2. On peut aussi appeler *composition bialternée* l'opération correspondante.

20. Si, dans le cas où $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$, on pose

$$\bar{x}_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_2} = - x_{i_2 i_1}, \qquad \bar{u}_{j_1 j_2} = u_{j_1 j_2} = - u_{j_2 j_1}$$
$$(i_1 i_2, j_1 j_2 = 12, 13, \ldots, 1m, 23, \ldots, 2m, \ldots),$$

la forme $A_1 . A_2$ sera linéaire par rapport aux $\frac{1}{2} m(m-1)$ variables $\bar{x}_{12}, \bar{x}_{13}, \ldots, \bar{x}_{1m}, \bar{x}_{23}, \ldots, \bar{x}_{2m}, \ldots$, ainsi que par rapport aux $\frac{1}{2} m(m-1)$ variables $\bar{u}_{12}, \bar{u}_{13}, \ldots, \bar{u}_{1m}, \bar{u}_{23}, \ldots, \bar{u}_{2m}, \ldots$.

On aura ainsi

$$A_1 . A_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma (a'_{i_1 j_1} a''_{i_2 j_2} - a'_{i_1 j_2} a''_{i_2 j_1} - a'_{i_2 j_1} a''_{i_1 j_2} + a'_{i_2 j_2} a''_{i_1 j_1}) \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2},$$
$$A . A = \Sigma (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}) \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2},$$
$$E . E = \Sigma \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{i_1 i_2}.$$

Le déterminant $|A.A|$ a pour éléments les différents mineurs de second ordre $a_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} = a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} - a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1}$ du déterminant $|A|$, de sorte que l'on a, comme on sait,

$$|A.A| = |A|^{\frac{1}{2}m(m-1)}.$$

Lorsqu'on soumet les variables x à la substitution A, les expressions $\bar{x}$ se transforment par la substitution $A.A$ ($\bar{x}_{i_1 i_2}$ étant remplacé par $\Sigma a_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} \bar{x}_{i_1 i_2}$). De même, si l'on soumet les variables u à la substitution A', les expressions $\bar{u}$ se transforment par la substitution $(A.A)' = A'.A'$ ($\bar{u}_{i_1 i_2}$ étant remplacé par $\Sigma a_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} \bar{u}_{i_1 i_2}$).

21. Si dans les formes A, A_1, A_2, ... on remplace, comme d'habitude, les coefficients a_{ij}, a'_{ij}, ... par des produits symboliques $a_i \alpha_j$, $a'_i \alpha_j$, ..., on obtient

$$A = a_x u_\alpha, \qquad A_1 = a'_x u_\alpha, \qquad \ldots,$$

étant posé

$$a_x = \Sigma a_i x_i, \qquad a'_x = \Sigma a'_i x_i, \qquad \ldots,$$
$$u_\alpha = \Sigma \alpha_j u_j, \qquad u_\alpha = \Sigma \alpha'_j u_j, \qquad \ldots.$$

Les produits $A_1.A_2$, $A_3.A_4$ sont alors exprimés symboliquement comme il suit :

$$A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}(a'_x a''_x - a'_x a''_x)(u_\alpha u'_\alpha - u_\alpha u''_\alpha),$$
$$A_3.A_4 = \tfrac{1}{2}(a'''_x a^{\text{iv}}_x - a'''_x a^{\text{iv}}_x)(u'_\alpha u''_{\alpha^{\text{iv}}} - u'_\alpha u''_\alpha),$$

soit

$$A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma(a'_{i_1} a''_{i_2} - a'_{i_2} a''_{i_1})(\alpha'_{j_1} \alpha'_{j_2} - \alpha'_{j_1} \alpha''_{j_2}) \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2},$$
$$A_3.A_4 = \tfrac{1}{2}\Sigma(a'''_{i_1} a^{\text{iv}}_{i_2} - a'''_{i_2} a^{\text{iv}}_{i_1})(\alpha'''_{j_1} \alpha^{\text{iv}}_{j_2} - \alpha'''_{j_2} \alpha^{\text{iv}}_{j_1}) \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2}.$$

On a ainsi, pour le produit de la composition ordinaire des deux formes $A_1.A_2$ et $A_3.A_4$,

$$\begin{aligned}(A_1.A_2)(A_3.A_4) \\ = \tfrac{1}{4}(a'_x a''_x - a'_x a''_x)(a'''_x a^{\text{iv}}_x - a'''_x a^{\text{iv}}_x)(u_\alpha u'_{\alpha^{\text{iv}}} - u_\alpha u''_{\alpha^{\text{iv}}})(u'_\alpha u''_\alpha - u'_\alpha u''_\alpha).\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$A_1 A_3 = a'_\alpha a''_\alpha u_{\alpha'''}, \qquad A_1 A_4 = a'_\alpha a''_\alpha u_{\alpha^{\text{IV}}}, \qquad \ldots$$

et

$$A_1 A_3 . A_2 A_4 = \tfrac{1}{2} a'''_\alpha a^{\text{IV}}_{\alpha'} (a'_\alpha a''_{\alpha'} - a'_{\alpha'} a''_\alpha)(u'_{\alpha''} u''_{\alpha^{\text{IV}}} - u'_{\alpha^{\text{IV}}} u_{\alpha''}),$$
$$A_1 A_4 . A_2 A_3 = \tfrac{1}{2} a'''_{\alpha'} a^{\text{IV}}_\alpha (a'_\alpha a''_{\alpha'} - a'_{\alpha'} a''_\alpha)(u'_{\alpha''} u''_{\alpha^{\text{IV}}} - u'_{\alpha^{\text{IV}}} u_{\alpha''}).$$

On voit par là que la composition bialternée des formes bilinéaires est liée à la composition ordinaire de ces formes par la relation

$$2(A_1 . A_2)(A_3 . A_4) = A_1 A_3 . A_2 A_4 + A_1 A_4 . A_2 A_3.$$

qui est *fondamentale* pour la théorie qui nous occupe.

De cette relation nous déduisons les suivantes :

$$(A_1 . A_2)(A . A) = A_1 A . A_2 A,$$
$$(A . A)(A_1 . A_2) = A A_1 . A A_2,$$
$$(A_1 . A_1)(A_3 . A_3) = A_1 A_3 . A_1 A_3,$$

dont la dernière exprime que les substitutions A.A forment un groupe. Du reste, on peut déduire réciproquement de cette dernière relation la propriété fondamentale au moyen des opérations $A_2 \frac{\partial}{\partial A_1}$, $A_1 \frac{\partial}{\partial A_2}$.

On a, de même,

$$(A_1 . E)(A . A) = A_1 A . A,$$
$$(A . A)(A_1 . E) = A A_1 . A,$$
$$2(A_1 . E)(A_2 . E) = A_1 A_2 . E + A_1 . A_2.$$
$$(A . A)^\rho = A^\rho . A^\rho,$$

et en particulier

$$(A . A)^{-1} = A^{-1} . A^{-1},$$

dans le cas où $|A| \neq 0$.

Étant donnée une fonction entière de ξ' et ξ''

$$\varphi(\xi', \xi'') = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2},$$

on peut poser

$$\varphi(A; A) = \Sigma c_{\beta_1\beta_2} A^{\beta_1}.A^{\beta_2}.$$

Les diverses formes $\varphi(A; A)$, correspondant à une même forme A, sont toutes échangeables entre elles, et cela par suite de la relation

$$\begin{aligned} &2(A^{\beta_1}.A^{\beta_2})(A^{\beta_3}.A^{\beta_4}) \\ &\quad = 2(A^{\beta_3}.A^{\beta_4})(A^{\beta_1}.A^{\beta_2}) = A^{\beta_1+\beta_3}.A^{\beta_2+\beta_4} + A^{\beta_1+\beta_4}A^{\beta_2+\beta_3}. \end{aligned}$$

22. La forme

$$\begin{aligned} A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}[&f_1(x', u')f_2(x'', u'') - f_1(x', u'')f_2(x'', u') \\ &- f_1(x'', u')f_2(x', u'') + f_1(x'', u'')f_2(x', u')] \end{aligned}$$

est évidemment un concomitant des deux formes A_1, A_2, lorsqu'on considère les x'', u'' comme des variables cogrédientes aux variables x', u' respectivement.

La relation

$$A_3A_4A_1.A_3A_2A_1 = (A_3.A_3)(A_1.A_2)(A_1.A_4)$$

montre que, si l'on soumet dans les formes A_1 et A_2 les variables x et u respectivement aux substitutions A_3 et A'_1, on obtient deux nouvelles formes $A_3A_4A_1$, $A_3A_2A_1$ dont le produit

$$A_3A_4A_1.A_3A_2A_1$$

coïncide avec le résultat qu'on obtient en soumettant dans la forme $A_1.A_2$ les variables $\bar{x}$ et $\bar{u}$ aux substitutions $A_3.A_3$ et $A'_1.A'_1$.

La relation $(A.A)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}$ montre, d'autre part, que si les deux transformations A_3 et A'_1 sont contragrédientes, il en est de même pour les transformations $A_3.A_3$ et $A'_1.A'_1$.

23. Soit

$$A = \Sigma a_{ij}x_iu_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

une forme pouvant être mise, au moyen de deux substitutions contra-

grédientes convenables A_1 et $A_1'^{-1}$, sous la forme canonique

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_i x_i u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La forme $A.A$ devient alors, par les substitutions contragrédientes correspondantes $A_1.A_1$ et $A_1'^{-1}.A_1'^{-1}$,

$$A_1 A A_1^{-1}.A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_{i_1} \xi_{i_2} \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{i_1 i_2} \qquad (i_1 i_2 = 12, 13, \ldots, 23, \ldots).$$

De même les formes $A.E$ et $A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$ deviennent respectivement

$$A_1 A A_1^{-1}.E = \tfrac{1}{2}\Sigma(\xi_{i_1} + \xi_{i_2})\bar{x}_{i_1 i_2}\bar{u}_{i_1 i_2},$$

$$A_1 A^{\rho_1} A_1^{-1}.A_1 A^{\rho_2} A_1^{-1} = \tfrac{1}{2}\Sigma(\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2} + \xi_{i_1}^{\rho_2}\xi_{i_2}^{\rho_1})\bar{x}_{i_1 i_2}\bar{u}_{i_1 i_2},$$

et, en général, la forme

$$\varphi(A; A) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$$

devient

$$(A_1.A_1)\varphi(A; A)(A_1.A_1)'^{-1} = \tfrac{1}{2}\Sigma[\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \varphi(\xi_{i_2}, \xi_{i_1})]\bar{x}_{i_1 i_2}\bar{u}_{i_1 i_2}.$$

On déduit de là la conclusion importante suivante :

Si $\varphi(\xi', \xi'') = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2}$, *l'équation caractéristique*

$$|\varphi(A; A) - \lambda E.E| = 0$$

de la forme

$$\varphi(A; A) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$$

a pour racines les $\frac{1}{2}m(m-1)$ *valeurs que prend l'expression*

$$\tfrac{1}{2}[\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \varphi(\xi_{i_2}, \xi_{i_1})]$$

pour les divers couples de racines ξ_{i_1}, ξ_{i_2} *de l'équation*

$$|A - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda) = 0.$$

Parmi les cas particuliers de cette proposition signalons les sui-

vants :

$$|A.E - \lambda E.E| = H[\tfrac{1}{2}(\xi_{i_1} + \xi_{i_2}) - \lambda],$$

$$|A.A - \lambda E.E| = H[\xi_{i_1}\xi_{i_2} - \lambda],$$

$$|A^{\rho_1}.A^{\rho_2} - \lambda E.E| = H[\tfrac{1}{2}(\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2} + \xi_{i_1}^{\rho_2}\xi_{i_2}^{\rho_1}) - \lambda],$$

$$|2A^2.E - 2A.A - \lambda E.E| = H[(\xi_{i_1} - \xi_{i_2})^2 - \lambda].$$

On voit par là que

$$|2A^2.E - 2A.A - \lambda E.E| = 0$$

est l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation $|A - \lambda E| = 0$, et que

$$|A^2.E - A.A|$$

est le discriminant de $|A - \lambda E|$.

La relation connue

$$|A.A| = |A|^{\frac{1}{2}m(m-1)}$$

se présente ici comme corollaire de la formule

$$|A.A - \lambda E.E| = H(\xi_{i_1}\xi_{i_2} - \lambda).$$

Ces résultats subsistent aussi dans le cas où la forme A ne peut pas être mise sous la forme canonique $\Sigma \xi_i x_i u_i$.

La théorie qui précède peut être appliquée à la résolution du problème suivant :

Étant donnée une équation

$$f(\xi) = \xi^m + a_1\xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière $\varphi(\xi', \xi'')$, *symétrique par rapport aux* ξ', ξ'', *former l'équation ayant pour racines les* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *valeurs de* $\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2})$ *correspondant aux divers couples de racines* ξ_{i_1}, ξ_{i_2} *de l'équation* $f(\xi) = 0$.

L'équation demandée sera

$$|\varphi(A; A) - \lambda E_1 . E|,$$

étant posé, comme au n° **14**,

$$\begin{aligned} A = &- a_1 x_1 u_1 - a_2 x_1 u_2 - \ldots - a_{m-1} x_1 u_{m-1} - a_m x_1 u_m \\ &+ x_2 u_1 + x_3 u_2 + \ldots + x_m u_{m-1}. \end{aligned}$$

24. La théorie précédente peut être étendue sans difficulté à la composition bialternée de $s \leq m$ formes bilinéaires

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j, \qquad \ldots, \qquad A_s = \Sigma a^{s}_{ij} x_i u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Ici nous nous bornerons à exposer quelques-uns des résultats relatifs au cas où $s = 3$.

Et d'abord on a, comme définition,

$$A_1 . A_2 . A_3 = \frac{1}{3!} \Sigma a'_{i_1 j_1} a''_{i_2 j_2} a'''_{i_3 j_3} x_{i_1 i_2 i_3} u_{j_1 j_2 j_3},$$

étant posé

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x'_{i_1} & x'_{i_2} & x'_{i_3} \\ x''_{i_1} & x''_{i_2} & x''_{i_3} \\ x'''_{i_1} & x'''_{i_2} & x'''_{i_3} \end{vmatrix}, \qquad u_{j_1 j_2 j_3} = \begin{vmatrix} u'_{j_1} & u'_{j_2} & u'_{j_3} \\ u''_{j_1} & u''_{j_2} & u''_{j_3} \\ u'''_{j_1} & u'''_{j_2} & u'''_{j_3} \end{vmatrix}$$
$$(i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, m).$$

Pourtant, si l'on pose

$$\bar{x}_{i_1 i_2 i_3} = x_{i_1 i_2 i_3} = - x_{i_1 i_3 i_2} = \ldots,$$
$$\bar{u}_{j_1 j_2 j_3} = u_{j_1 j_2 j_3} = - u_{j_1 j_3 j_2} = \ldots,$$

dans le cas où $i_1 < i_2 < i_3$, $j_1 < j_2 < j_3$, et si l'on écrit symboliquement (comme au n° **21**)

$$A_1 = a'_x u_\alpha, \qquad A_2 = a''_x u_{\alpha'}, \qquad A_3 = a'''_x u_{\alpha''}.$$

on aura

$$A_1.A_2.A_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} a'_{\alpha} & a'_{\alpha'} & a'_{\alpha''} \\ a''_{\alpha} & a''_{\alpha'} & a''_{\alpha''} \\ a'''_{\alpha} & a'''_{\alpha'} & a'''_{\alpha''} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u'_{\alpha} & u'_{\alpha'} & u'_{\alpha''} \\ u''_{\alpha} & u''_{\alpha'} & u''_{\alpha''} \\ u'''_{\alpha} & u'''_{\alpha'} & u'''_{\alpha''} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!}\Sigma\begin{vmatrix} a'_{i_1} & a'_{i_2} & a'_{i_3} \\ a''_{i_1} & a''_{i_2} & a''_{i_3} \\ a'''_{i_1} & a'''_{i_2} & a'''_{i_3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha'_{j_1} & \alpha'_{j_2} & \alpha'_{j_3} \\ \alpha''_{j_1} & \alpha''_{j_2} & \alpha''_{j_3} \\ \alpha'''_{j_1} & \alpha'''_{j_2} & \alpha'''_{j_3} \end{vmatrix} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3}\bar{u}_{j_1 j_2 j_3}.$$

La forme $A_1.A_2.A_3$ est donc linéaire par rapport aux $\binom{m}{3}$ variables $\bar{x}_{123}, \bar{x}_{124}, \ldots, \bar{x}_{234}, \ldots$ et aussi par rapport aux $\binom{m}{3}$ variables $\bar{u}_{123}, \bar{u}_{124}, \ldots, \bar{u}_{234}, \ldots$

On remarquera que le produit $A_1.A_2.A_3$ ne change pas quand on permute entre eux les trois facteurs A_1, A_2, A_3.

On a en particulier

$$A.A.A = \Sigma\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3}\bar{u}_{j_1 j_2 j_3},$$

et aussi

$$E.E.E = \Sigma\bar{x}_{i_1 i_2 i_3}\bar{u}_{i_1 i_2 i_3}.$$

Le déterminant $|A.A.A|$ a pour éléments les divers mineurs du troisième ordre du déterminant $|A|$, de sorte que l'on a, d'après ce qu'on sait,

$$|A.A.A| = |A|^{\binom{m}{3}}.$$

25. Dans le cas actuel on a la relation fondamentale

$$3!(A_1.A_2.A_3)(A_4.A_5.A_6) = S(A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6)$$

en désignant par $S(A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6)$ la somme des $3!$ expressions qu'on peut déduire de $A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6$ par la permutation des trois indices 4, 5, 6.

Parmi les conséquences de cette relation notons les formules suivantes

$$(A_1.A_2.A_3)(A.A.A) = A_1.A.A_2.A.A_3.A.$$
$$(A.A.A)(A_1.A_2.A_3) = AA_1.AA_2.AA_3.$$
$$(A_1.A_1.A_1)(A_2.A_2.A_2) = A_1A_2.A_1A_2.A_1A_2.$$

dont la dernière exprime que les substitutions A.A.A forment un groupe.

On a aussi

$$(A.A.A)^\rho = A^\rho.A^\rho.A^\rho$$

et, en particulier, dans le cas où $|A| \neq 0$,

$$(A.A.A)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}.$$

Si l'on a

$$\varphi(\xi', \xi'', \xi''') = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2} \xi'''^{\rho_3},$$

et que l'on représente par $S\varphi(\xi', \xi'', \xi''')$ *la somme des* $3!$ *expressions qu'on déduit de* $\varphi(\xi', \xi'', \xi''')$ *par la permutation des lettres* ξ', ξ'', ξ''', *l'équation caractéristique*

$$|\varphi(A\,;A\,;A) - \lambda E.E.E| = 0$$

de la forme

$$\varphi(A\,;A\,;A) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3}.$$

aura pour racines les $\binom{m}{3}$ *valeurs que prend l'expression*

$$\frac{1}{3!} S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3})$$

pour les diverses combinaisons par trois des racines de l'équation $|A - \lambda E| = 0$.

Parmi les cas particuliers de ce résultat notons les suivants :

$$|A.E.E - \lambda E.E.E| = \Pi[\tfrac{1}{3}(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \xi_{i_3}) - \lambda].$$
$$|A.A.E - \lambda E.E.E| = \Pi[\tfrac{1}{3}(\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \xi_{i_1}\xi_{i_3} + \xi_{i_2}\xi_{i_3}) - \lambda],$$
$$|A.A.A - \lambda E.E.E| = \Pi[\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3} - \lambda].$$

26. On se rend aisément compte comment les propriétés précédentes peuvent être généralisées pour le cas du produit alterné d'un nombre quelconque $s \leq m$ de formes bilinéaires.

Remarquons pourtant que l'on a, en général, pour le produit bialterné A^s, de s formes égales à $A = f(x, u)$,

$$A^s = \begin{vmatrix} f(x', u') & f(x', u'') & \dots & f(x', u^{s)}) \\ f(x'', u') & f(x'', u'') & \dots & f(x'', u^{s)}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ f(x^s, u') & f(x^{s)}, u'') & \dots & f(x^s, u^{s)}) \end{vmatrix}.$$

Cette forme conduit, en remplaçant les déterminants des tableaux

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_m \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^s_1 & x^{s)}_2 & \dots & x^s_m \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & \dots & u'_m \\ u''_1 & u''_2 & \dots & u''_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^s_1 & u^{s)}_2 & \dots & u^s_m \end{vmatrix}$$

par les déterminants complémentaires des tableaux

$$\begin{vmatrix} u_1^{s+1} & u_2^{s+1} & \dots & u_m^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^m & u_2^m & \dots & u_m^m \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x_1^{s+1)} & x_2^{s+1)} & \dots & x_m^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m)} & x_2^{m)} & \dots & x_m^{m)} \end{vmatrix}$$

à l'adjointe d'ordre $m - s$ de la forme A

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1^{s+1)} & x_2^{s+1} & \dots & x_m^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x_1^{m)} & x_2^{m} & \dots & x_m^{m)} \\ u_1^{s+1} & \dots & u_1^{m)} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ u_2^{s+1} & \dots & u_2^{m)} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m^{s+1} & \dots & u_m^{m)} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

multipliée par $(-1)^{m^2 - s^2}$.

De même que, dans le cas où $s = 2$, la relation fondamentale

$$2(A_1.A_2)(A_3.A_4) = A_1 A_3.A_2 A_4 + A_1 A_4.A_2 A_3$$

peut être déduite de la relation

$$(A_1.A_1)(A_3.A_3) = A_1 A_3.A_1 A_3,$$

au moyen des opérations $A_2 \frac{\partial}{\partial A_1}$, $A_4 \frac{\partial}{\partial A_3}$, de même, dans le cas général, la relation

$$(A_1^s)(A_2^s) = (A_1.A_2)^s,$$

qui exprime que les substitutions A^s forment un groupe, peut conduire, par des procédés analogues et en remarquant que le produit

$$A_1.A_2 \ldots A_s$$

est indépendant de l'ordre des facteurs, à la relation fondamentale

$$s!(A_1.A_2 \ldots A_s)(A_{s+1}.A_{s+2} \ldots A_{2s}) = S(A_1 A_{s+1}.A_2 A_{s+2} \ldots A_s A_{2s}),$$

le symbole de sommation S se rapportant à toutes les expressions analogues à $A_1 A_{s+1}.A_2 A_{s+2} \ldots A_s A_{2s}$, obtenues en permutant dans cette expression les indices $s+1, s+2, \ldots, 2s$.

Si l'on pose

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s}$$

et

$$\varphi(A; A; \ldots; A) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} A^{\rho_1}.A^{\rho_2} \ldots A^{\rho_s},$$

on aura, de même qu'aux n^os **23** et **24**,

$$|\varphi(A; A; \ldots; A) - \lambda E^s| = \Pi[S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_s}) - \lambda],$$

et, en particulier,

$$|A^s - \lambda E^s| = \Pi(\xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_s} - \lambda).$$

Cette dernière formule fait voir que *si l'on retranche λ de tous les*

éléments de la diagonale principale du déterminant $|A'|$ *on obtient un nouveau déterminant qui a pour racines les produits des racines de l'équation* $|A - \lambda E| = 0$ *prises s à s* [1].

De là on déduit la propriété connue [2] que le déterminant ayant pour éléments les divers mineurs d'ordre $s \leq m$ du déterminant $|A|$ est égal à la puissance $\binom{m}{s}$ du déterminant $|A|$.

Il est également aisé de voir comment on peut obtenir la solution du problème suivant :

Étant donnée une équation

$$f(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière symétrique

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s},$$

des variables

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_s \qquad (s \leq m)$$

trouver l'équation d'ordre $\binom{m}{s}$ *ayant pour racines les* $\binom{m}{s}$ *valeurs que prend* $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ *pour les diverses combinaisons des racines de* $f(\xi) = 0$ *prises s à s.*

En effet, si l'on représente par A la même forme bilinéaire qu'au n° **14**, l'équation cherchée sera

$$|\varphi(A; A; \ldots; A) - \lambda E^s| = 0.$$

Remarquons enfin que l'on a

$$A_1 . A_2 \ldots A_m = |A_1 . A_2 \ldots A_m| x_{12 \ldots m} u_{12 \ldots m}.$$

27. En partant des propriétés de la composition bialternée des

[1]) G. Rados, *Mathem. Annalen*, t. XLVIII, p. 417; 1896.

[2]) Franke, *Crelle's J.*, t. 61, p. 350; 1863. Pour des renvois relatifs voir l'Article de M. Netto, cité plus haut (p. 85).

formes bilinéaires, on peut retrouver celles de leur conjonction, examinées dans le précédent Chapitre (II).

En effet, si l'on a les formes

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B = \Sigma b_{kl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut considérer le produit bialterné

$$(A + B).(A + B) = A.A + 2A.B + B.B,$$

où

$$A.A = \Sigma(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}) \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2} \qquad (i_1 < i_2,\ j_1 < j_2),$$
$$B.B = \Sigma(b_{k_1 l_1} b_{k_2 l_2} - b_{k_1 l_2} b_{k_2 l_1}) \bar{y}_{k_1 k_2} \bar{v}_{l_1 l_2} \qquad (k_1 < k_2,\ l_1 < l_2)$$

et

$$2A.B = \Sigma a_{ij} b_{kl} (x'_i y''_k - x''_i y'_k)(u'_j v''_l - u''_j v'_l).$$

Ainsi donc la forme $2A.B$ ne diffère de

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

que par la désignation des variables, qui sont du reste respectivement cogrédientes aux variables $x'_i y''_k - x''_i y'_k$, $u''_j v''_l - u''_j v'_l$, puisque les unes et les autres sont soumises aux mêmes substitutions lorsqu'on soumet les x, u, y, v respectivement aux substitutions A_1, A'_2, B_1, B'_2.

Si maintenant on pose

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j,$$
$$B_1 = \Sigma b'_{kl} y_k v_l, \qquad B_2 = \Sigma b''_{kl} y_k v_l,$$

on aura, d'après la loi fondamentale de la composition bialternée,

$$2(A_1.B_1)(A_2.B_2) = A_1 A_2.B_1 B_2 + A_1 B_2.B_1 A_2,$$

mais comme $A_1 B_2 = B_1 A_2 = 0$, on aura

$$2(A_1.B_1)(A_2.B_2) = A_1 A_2.B_1 B_2.$$

On obtient de là, en remplaçant $2(A.B)$ par $A \times B$, etc., la relation

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2,$$

qui constitue la loi fondamentale de la conjonction des formes bilinéaires.

Remarquons aussi que le déterminant

$$|(A + B).(A + B) - \lambda(E + F).(E + F)|$$

est le produit des trois déterminants

$$|A.A - \lambda E.E|, \qquad |B.B - \lambda F.F|$$

et

$$|2A.B - 2\lambda E.F|,$$

dont le dernier coïncide avec le déterminant

$$|A \times B - \lambda E \times F|.$$

La composition bialternée des formes bilinéaires, étendue à un plus grand nombre de telles formes, conduit également à la composition mixte de ces formes, dont il sera question dans le Chapitre qui suit.

IV. — Composition mixte des formes bilinéaires.

28. Étant donnés plusieurs produits bialternés de formes bilinéaires

$$A_1.A_2 \ldots A_s, \quad B_1.B_2 \ldots B_t, \quad \ldots,$$

on peut considérer le produit de leur conjonction

$$(A_1.A_2 \ldots A_s) \times (B_1.B_2 \ldots B_t) \times \ldots$$

(qui subsiste même dans le cas où s ou t... devient égal à zéro).

Les propriétés de ces produits mixtes peuvent se déduire aisément de ceux des produits conjonctifs et bialternés.

Nous allons exposer quelques-unes de ces propriétés pour le cas du

produit

$$A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2 .$$

Si l'on pose

$$A_1 = a'_i u_\alpha = \Sigma a'_{ij} x_i u_j,$$
$$A_2 = a''_i u_{\alpha''} = \Sigma a''_{ij} x_i u_j,$$
$$A_3 = a'''_i u_{\alpha'''} = \Sigma a'''_{ij} x_i u_j,$$
$$B_1 = b'_k u_{\beta'} = \Sigma b'_{kl} y_k v_l,$$
$$B_2 = b''_k u_{\beta''} = \Sigma b''_{kl} y_k v_l$$
$$(\text{où } i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$A_1 . A_2 . A_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} a'_{i'} & a'_{i''} & a'_{i'''} \\ a''_{i'} & a''_{i''} & a''_{i'''} \\ a'''_{i'} & a'''_{i''} & a'''_{i'''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'_{\alpha'} & u_\alpha & u_{\alpha'} \\ u'_{\alpha''} & u_{\alpha''} & u'''_{\alpha''} \\ u'_{\alpha'''} & u''_{\alpha'''} & u'''_{\alpha'''} \end{vmatrix}$$

et

$$B_1 . B_2 = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} b'_{y'} & b'_{y''} \\ b'_{y'} & b'_{y''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v'_{\beta'} & v'_{\beta'} \\ v'_{\beta'} & v''_{\beta''} \end{vmatrix},$$

soit

$$A_1 . A_2 . A_3 = \frac{1}{3!} \Sigma a_{i_1 i_2 i_3} \alpha_{j_1 j_2 j_3} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3} \bar{u}_{j_1 j_2 j_3},$$

$$B_1 . B_2 = \frac{1}{2!} \Sigma b_{k_1 k_2} \beta_{l_1 l_2} \bar{y}_{k_1 k_2} \bar{v}_{l_1 l_2},$$

étant posé

$$a_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} a'_{i_1} & a'_{i_2} & a'_{i_3} \\ a''_{i_1} & a''_{i_2} & a''_{i_3} \\ a'''_{i_1} & a'''_{i_2} & a'''_{i_3} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{x}_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x'_{i_1} & x'_{i_2} & x'_{i_3} \\ x''_{i_1} & x''_{i_2} & x''_{i_3} \\ x'''_{i_1} & x'''_{i_2} & x'''_{i_3} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$b_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} b'_{k_1} & b'_{k_2} \\ b''_{k_1} & b''_{k_2} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{y}_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} y'_{k_1} & y'_{k_2} \\ y''_{k_1} & y''_{k_2} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

et en supposant que

$$i_1 < i_2 < i_3, \qquad j_1 < j_2 < j_3, \qquad k_1 < k_2, \qquad l_1 < l_2.$$

On aura ainsi

$$A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2 = \frac{1}{3!\,3!}\Sigma a_{i_1i_2i_3}\alpha_{j_1j_2j_3}b_{k_1k_2}\beta_{l_1l_2}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2},$$

résultat obtenu en remplaçant, dans le produit algébrique des deux formes $A_1.A_2.A_3$ et $B_1.B_2$, les produits

$$\overline{x}_{i_1i_2i_3}\overline{y}_{k_1k_2}, \quad \overline{u}_{j_1j_2j_3}\overline{v}_{l_1l_2} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 < i_3,\ j_1 < j_2 < j_3,\ k_1 < k_2,\ l_1 < l_2)$$

par les variables

$$\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}, \quad \overline{u}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2}.$$

Si l'on pose

$$A = \Sigma a_{ij}x_iu_j, \qquad E = \Sigma x_iu_i, \qquad B = \Sigma b_{kl}y_kv_l, \qquad F = \Sigma y_kv_k$$

et

$$a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1j_3} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2j_3} \\ a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} & a_{i_3j_3} \end{vmatrix}, \qquad b^{k_1k_2}_{l_1l_2} = \begin{vmatrix} b_{k_1l_1} & b_{k_1l_2} \\ b_{k_2l_1} & b_{k_2l_2} \end{vmatrix},$$

on aura

$$A.A.A \times B.B = \Sigma a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}b^{k_1k_2}_{l_1l_2}\overline{x}^{j_1j_2j_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{l_1l_2j_3}_{l_1l_2},$$

$$A.A.A \times F.F = \Sigma a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}\overline{x}^{j_1j_2j_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{j_1j_2j_3}_{k_1k_2},$$

$$E.E.E \times B.B = \Sigma b^{k_1k_2}_{l_1l_2}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{i_1i_2i_3}_{l_1l_2},$$

$$E.E.E \times F.F = \Sigma \overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}.$$

29. Si l'on soumet les variables $x(x', x'', \ldots)$ et $y(y', y'', \ldots)$ aux substitutions A_1 et B_1, les expressions

$$\overline{x}_{i_1i_2i_3} = \Sigma \pm x'_{i_1}x''_{i_2}x'''_{i_3}, \qquad \overline{y}_{k_1k_2} = \Sigma \pm y_{k_1}y_{k_2}$$

sont soumises respectivement aux substitutions $A.A.A$ et $B.B$ (n° **20**), et les expressions

$$\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2} = \overline{x}_{i_1i_2i_3}\overline{y}_{k_1k_2}$$

à la substitution

$$A_1.A_1.A_1 \times B_1.B_1.$$

De même, lorsqu'on soumet les variables u et v aux substitutions A'_2 et B'_2, les expressions u_{hdfi} et $\bar{v}_{i_1 i_2}$ sont soumises respectivement aux transformations $A'_2 . A'_2 . A'_2$ et $B'_2 . B'_2$, et les expressions

$$u^{hdfi}_{i_1 i_2} = u_{hdfi} \bar{v}_{i_1 i_2}$$

à la transformation

$$A'_2 . A'_2 . A'_2 \times B'_2 . B'_2 .$$

50. D'après les propriétés de l'opération de conjonction, on aura la relation fondamentale

$$\begin{aligned}(A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2)(A_4 . A_5 . A_6 \times B_3 . B_4) \\ = (A_1 . A_2 . A_3)(A_4 . A_5 . A_6) \times (B_1 . B_2)(B_3 . B_4),\end{aligned}$$

où (d'après les n^os **21**, **25**)

$$\begin{aligned}3!(A_1 . A_2 . A_3)(A_4 . A_5 . A_6) &= S(A_1 A_4 . A_2 A_5 . A_3 A_6), \\ 2!(B_1 . B_2)(B_3 . B_4) &= B_1 B_3 . B_2 B_4 + B_1 B_4 . B_2 B_3 .\end{aligned}$$

On aura en particulier :

$$\begin{aligned}(A.A.A \times B.B)(A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2) &= AA_1 . AA_2 . AA_3 \times BB_1 . BB_2, \\ (A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2)(A.A.A \times B.B) &= A_1 A . A_2 A . A_3 A \times B_1 B . B_2 B, \\ (A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2)(E.E.E \times F.F) \\ = (E.E.E \times F.F)(A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2) &= A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2, \\ (A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)(A_2 . A_2 . A_2 \times B_2 . B_2) \\ = A_1 A_2 . A_1 A_2 . A_1 A_2 \times B_1 B_2 . B_1 B_2 .\end{aligned}$$

Cette dernière formule fait voir que les substitutions $A.A.A \times B.B$ constituent un groupe. La substitution identique de ce groupe correspond à la forme $E.E.E \times F.F$.

Comme on a, de plus,

$$\begin{aligned}(A.A.A \times F.F)(E.E.E \times B.B) \\ = (E.E.E \times B.B)(A.A.A \times F.F) &= A.A.A \times B.B, \\ (A_1 . A_1 . A_1 \times F.F)(A_2 . A_2 . A_2 \times F.F) &= A_1 A_2 . A_1 A_2 . A_1 A_2 \times F.F, \\ (E.E.E \times B_1 . B_1)(E.E.E \times B_2 . B_2) &= E.E.E \times B_1 B_2 . B_1 B_2,\end{aligned}$$

on voit que le groupe des substitutions $A.A.A \times B.B$ comprend les deux sous-groupes $A.A.A \times F.F$ et $E.E.E \times B.B$, dont chacun comprend des substitutions échangeables aux substitutions de l'autre. On voit aussi que toute substitution $A.A.A \times B.B$ est le produit d'une substitution du premier groupe par une substitution du second.

On a également

$$(A.A.A \times B.B)^{\rho} = A^{\rho}.A^{\rho}.A^{\rho} \times B^{\rho}.B^{\rho}, \quad \ldots,$$

et, en particulier,

$$(A.A.A \times B.B)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1} \times B^{-1}.B^{-1},$$

dans le cas où $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

Étant donnée une fonction entière quelconque de ξ', ξ'', ξ''', η', η'',

$$\varphi(\xi', \xi'', \xi''' : \eta', \eta'') = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi'^{\rho} \xi''^{\rho_2} \xi'''^{\rho_3} \eta'^{\sigma_1} \eta''^{\sigma_2},$$

on peut poser

$$\ddot{\varphi}(A, A, A ; B, B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3} \times B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2}.$$

A la même forme $\ddot{\varphi}$ conduisent évidemment toutes les fonctions déduites de φ par la permutation des ξ', ξ'', ξ''' ou des η', η'' et aussi la moyenne

$$\frac{1}{3!\,2!} S\varphi(\xi', \xi'', \xi''' : \eta', \eta'')$$

de ces $3!\,2!$ fonctions, qui est symétrique aussi bien par rapport aux ξ', ξ'', ξ''', que par rapport aux η', η''.

Les diverses formes $\ddot{\varphi}$, correspondant à deux formes A et B données, sont échangeables entre elles.

51. Si dans les formes A_3, A_4, A_5 on soumet les variables x et u aux substitutions A_1, A_2, et que, de même, dans les formes B_3, B_4 on soumet les variables y et v aux substitutions B_1, B_2, on obtient cinq

nouvelles formes

$$A_1 A_3 A_2, \quad A_1 A_4 A_2, \quad A_1 A_5 A_2, \quad B_1 B_3 B_2, \quad B_1 B_4 B_2,$$

dont le produit mixte

$$A_1 A_3 A_2 . A_1 A_4 A_2 . A_1 A_5 A_2 \times B_1 B_3 B_2 . B_1 B_4 B_2$$

coïncide avec le résultat

$$(A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)(A_3 . A_4 . A_5 \times B_3 . B_4)(A_2 . A_2 . A_2 \times B_2 . B_2)$$

qu'on obtient en soumettant la forme $A_3 . A_4 . A_5 \times B_3 . B_4$ aux substitutions $A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1$ et $A'_2 . A'_2 . A'_2 \times B'_2 . B'_2$, opérées respectivement sur les deux séries de variables $\bar{x}$ et $\bar{u}$.

Dans le cas où les substitutions A'_2 et B'_2 sont respectivement contragrédientes aux transformations A_1 et B_1, la transformation

$$A_2 . A'_2 . A'_2 \times B'_2 . B'_2$$

est la contragrédiente de $A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1$.

32. Si les substitutions A_1, A_1^{-1} et B_1, B_1^{-1} transforment A et B respectivement en

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_{ti} x_t u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B_1 B B_1^{-1} = \Sigma \eta_{hk} y_h v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$(A_1 . A_1 . A_1)(A^{\rho_1} . A^{\rho_2} . A^{\rho_3})(A_1 . A_1 . A_1)^{-1} = \frac{1}{3!} \Sigma (S \xi_{t_1}^{\rho_1} \xi_{t_2}^{\rho_2} \xi_{t_3}^{\rho_3}) \bar{x}_{t_1 t_2 t_3} u_{t_1 t_2 t_3},$$
$$(B_1 . B_1)(B^{\sigma_1} . B^{\sigma_2})(B_1 . B_1)^{-1} = \frac{1}{2!} \Sigma (S \eta_{h_1}^{\sigma_1} \eta_{h_2}^{\sigma_2}) \bar{y}_{h_1 h_2} \bar{v}_{h_1 h_2},$$

et

$$(A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)(A^{\rho_1} . A^{\rho_2} . A^{\rho_3} \times B^{\sigma_1} . B^{\sigma_2})(A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)^{-1}$$
$$= \frac{1}{3!\,2!} \Sigma (S \xi_{t_1}^{\rho_1} \xi_{t_2}^{\rho_2} \xi_{t_3}^{\rho_3})(S \eta_{h_1}^{\sigma_1} \eta_{h_2}^{\sigma_2}) \bar{x}_{h_1 h_2}^{t_1 t_2 t_3} \bar{u}_{h_1 h_2}^{t_1 t_2 t_3},$$

en désignant par $S\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}$ la somme des 3! expressions qu'on obtient en permutant dans $\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}$ les i_1, i_2, i_3 ($i_1 < i_2 < i_3$), et de même par $S\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2}$ la somme $\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2} + \eta_{k_1}^{\sigma_2}\eta_{k_2}^{\sigma_1}$ (où $k_1 < k_2$).

On a aussi, en général,

$$(A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)\ddot{\varphi}(A, A, A; B, B)(A_1 . A_1 . A_1 \times B_1 . B_1)'$$
$$= \frac{1}{3!\,2!}\Sigma[S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})]\overline{x}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2 i_3}\overline{u}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2 i_3},$$

où nous avons désigné par $S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})$ la somme des 3! 2! valeurs que prend

$$\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2}) = \Sigma c_{(\rho)(\sigma)}\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2}$$

lorsqu'on y permute entre eux les i_1, i_2, i_3 et aussi les k_1, k_2.

Nous déduisons de là que *l'équation caractéristique*

$$|\varphi(A, A, A; B, B) - \lambda E.E.E \times F.F| = 0$$

de la forme

$$\ddot{\varphi}(A, A, A; B, B) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3\sigma_1\sigma_2} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3} \times B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2}$$

a pour racines les $\binom{m}{3}\binom{n}{2}$ *valeurs que prend l'expression*

$$S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})$$

(qui est symétrique aussi bien par rapport aux ξ_{i_1}, ξ_{i_2}, ξ_{i_3} *que par rapport aux* η_{k_1}, η_{k_2}*), pour les divers triples de racines* ξ_{i_1}, ξ_{i_2}, ξ_{i_3} *de l'équation* $|A - \lambda E| = 0$ *et les divers couples de racines* η_{k_1}, η_{k_2} *de l'équation* $|B - \lambda F| = 0$.

V. — Transformations linéaires des mineurs d'un Tableau.

55. Nous savons déjà (n° **16**) que lorsqu'on soumet les éléments X_{ik} d'un Tableau à m lignes et à n colonnes :

$$\begin{matrix} X_{11}, & X_{12}, & \ldots, & X_{1n}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots, & X_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ X_{m1}, & X_{m2}, & \ldots, & X_{mn}, \end{matrix}$$

à une substitution linéaire $A \times B$, qui fait remplacer X_{jl} par $\Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik}$, tous les mineurs

$$X_{(l)}^{(p)} = X_{i_1 i_2 \ldots i_s}^{j_1 j_2 \ldots j_s} = \Sigma \pm X_{j_1 l_1} X_{j_2 l_2} \ldots X_{j_s l_s}$$

de même ordre s de ce Tableau sont aussi remplacés par des combinaisons linéaires de ces mineurs.

Ainsi, tandis que la substitution $A \times F$ fait remplacer X_{il}^{j} par

$$\Sigma a_{(j)}^{(i)} X_{(l)}^{(p)} = \Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} X_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 \ldots < i_s)$$

et que la substitution $E \times B$ fait remplacer $X_{(l)}^{(p)}$ par

$$\Sigma b_{(l)}^{(k)} X_{(k)}^{(p)} = \Sigma b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} X_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{l_1 l_2 \ldots l_s} \qquad (\text{où } k_1 < k_2 < \ldots < k_s),$$

la substitution $A \times B = (A \times F)(E \times B) = (E \times B)(A \times F)$ fait remplacer $X_{(l)}^{(p)}$ par

$$\Sigma a_{(j)}^{(i)} b_{(l)}^{(k)} X_{(k)}^{(p)} = \Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} X_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s}$$
$$(\text{où } i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ k_1 < k_2 < \ldots < k_s).$$

Maintenant, si l'on représente par A^s et B^s les produits bialternés A.A...A, B.B...B, de s facteurs égaux à A ou à B, on aura

$$A^s \times B^s = \Sigma a_{(j)}^{(i)} b_{(l)}^{(k)} \overline{x}_{(k)}^{(i)} \overline{u}_{(l)}^{(j)}.$$

On voit par là que *lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A \times B$, *les expressions* X_l^j *sont soumises à la substitution* $A^s \times B^s$.

54. Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante :

Si, en partant de s formes

$$X_1 = \Sigma X_{jl} u_j v_l, \qquad X_2 = \Sigma X_{jl} u_j v_l, \qquad \ldots,$$

on considère leur produit bialterné

$$X_1 . X_2 . \ldots . X_s = \Sigma X_l^j \overline{u}_j v_l,$$

les coefficients X_l^j *de ce produit ont la propriété que, lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A \times B$, *ils sont soumis à la substitution* $A^s \times B^s$, *c'est-à-dire que* $X_l^{(j)}$ *est remplacé par*

$$\Sigma a_j^{(i)} b_l^{(k)} X_k^{(i)}.$$

En effet, si l'on représente les formes $X_1, X_2, \ldots$ symboliquement par

$$X_1 = u_x v_y, \qquad X_2 = u_{x''} v_{y''}, \qquad \ldots$$

(étant posé $X_{jl} = x_j y_l, \ldots$), on aura, comme au n° **28**,

$$X_l^j = \frac{1}{s!} \begin{vmatrix} x_l & x_{l_2} & \ldots & x_{l_s} \\ x_{l_1} & x_{l_2} & \ldots & x_{l_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{l_1}^s & x_{l_2}^s & \ldots & x_{l_s}^s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{l_1} & y_{l_2} & \ldots & y_{l_s} \\ y_{l_1} & y_{l_2} & \ldots & y_{l_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{l_1}^s & y_{l_2}^s & \ldots & y_{l_s}^s \end{vmatrix} = \frac{1}{s!} x_j y_l.$$

Or, soumettre les X_{jl} à la substitution $A \times B$, c'est soumettre les x_l à la substitution A et les y_l à la substitution B, ce qui a pour résultat de soumettre les $\overline{x}_{(j)}$ à la substitution A^s, les $\overline{y}_{(l)}$ à la substitution B^s et les X_l^j à la substitution $A^s \times B^s$ (*voir* n° **29**).

On peut aussi démontrer la propriété dont il s'agit en remarquant que

Lorsqu'on soumet les formes $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *aux substitutions* A', B' *opérées respectivement sur les variables* u *et* v, *on obtient* s *nouvelles formes* $A'X_1B, A'X_2B, \ldots$ *dont le produit bialterné*

$$A'X_1B.A'X_2B\ldots A'x_sB$$

coïncide avec la forme

$$(A'^s)(X_1.X_2\ldots X_s)(B^s),$$

qu'on obtient en soumettant la forme $X_1.X_2\ldots X_s$ *aux substitutions*

$$A'^s = (A^s)', \qquad B'^s = (B^s)',$$

opérées respectivement sur les variables $\overline{u}_{(j)}$ et $\overline{v}_{(k)}$.

On remarquera que, en particulier, dans le cas où $m = n$ et $s = m$, *si, dans l'expression* $X^{1\,2\ldots m}_{1\,2\ldots m} = |X_1.X_2\ldots X_m|$, *on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A \times B$, *cette expression se reproduit multipliée par*

$$|A||B|.$$

33. Examinons maintenant si, en dehors des substitutions linéaires $A \times B$, il y a d'autres substitutions linéaires qui, effectuées sur les éléments X_{jl} d'un Tableau à m lignes et à n colonnes, opèrent des substitutions linéaires entre les mineurs $X^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{l_1 l_2 \ldots l_s}$ d'ordre s de ce Tableau, et cela quel que soit s ($s = 2, 3, \ldots, s \leq m, s \leq n$).

Et d'abord examinons quelles sont les transformations linéaires des éléments X_{jl} qui opèrent des transformations linéaires entre les mineurs du second ordre $X^{j_1 j_2}_{l_1 l_2}$.

Comme toute transformation pareille doit remplacer chaque mineur du second ordre par une combinaison linéaire des mineurs du même ordre, elle doit substituer à tout système de valeurs des X_{jl} tel que

$X_{jl} = x_j y_l$ et dont tous les mineurs du second ordre sont nuls, un autre système dont tous les mineurs du second ordre soient aussi nuls.

Si donc une pareille transformation remplace X_{jl} par

$$\Sigma a_{ik,jl} X_{ik}$$

et $x_j y_l$ par

$$\Sigma a_{ik,jl} x_i y_k = f_{jl}(x, y),$$

on aura

$$\begin{vmatrix} f_{j_1 l_1}(x, y), & f_{j_1 l_2}(x, y) \\ f_{j_2 l_1}(x, y), & f_{j_2 l_2}(x, y) \end{vmatrix} = 0.$$

Or cela ne peut arriver que dans trois cas seulement :

1° Lorsqu'il y a m formes $a'_x, a''_x, \ldots, a^{(m)}_x$, linéaires par rapport aux x, et n formes $b'_y, b''_y, \ldots, b^{(n)}_y$, linéaires par rapport aux y, qui soient telles que l'on ait

$$f_{jl}(x, y) = a^j_x b^l_y = \Sigma a_{ij} b_{kl} x_i y_k;$$

2° S'il y a n formes linéaires $\gamma'_y, \gamma''_y, \ldots, \gamma^{(n)}_y$ et m formes linéaires $\delta'_y, \delta''_y, \ldots, \delta^{(m)}_y$, telles que l'on ait

$$f_{jl}(x, u) = \gamma^l_y \delta^j_y = \Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} x_i y_j;$$

3° Si les formes $f_{jl}(x, u)$ sont toutes des multiples $\mu_j \nu_l f(x, y)$ d'une même forme $f(x, y)$.

Le dernier de ces trois cas ne donne pas de solution de notre problème, puisque alors la substitution à laquelle on soumet les X_{jl} remplace tous les mineurs $X^{j_1 j_2}_{l_1 l_2}$ par zéro.

D'autre part le premier de ces cas, où X_{jl} est remplacée par

$$\Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik},$$

fournit précisément les transformations $A \times B$ examinées dans ce qui précède.

Il n'y a donc que le second cas, celui où X_{jl} est remplacée par

$$\Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} X_{ik},$$

qui peut conduire à des transformations nouvelles.

Si l'on pose

$$\Gamma = \Sigma \gamma_{il} x_i v_l, \qquad \Delta = \Sigma \delta_{kj} y_k u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

et que l'on considère le produit *conjonctif*

$$\Gamma \times \Delta = \Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} X_{ik} U_{jl}$$

des formes bilinéaires Γ et Δ, on peut dire que, dans le second cas, les éléments X_{jl} sont soumis aux transformations $\Gamma \times \Delta$.

Nous allons maintenant examiner les propriétés des transformations $\Gamma \times \Delta$, qui établissent, comme nous verrons, des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre s du Tableau des X_{jl}, quel que soit s $(s \leq m,\ s \leq n)$.

56. Étant posé

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l,$$
$$\Gamma = \Sigma \gamma_{il} x_i v_l, \qquad \Delta = \Sigma \delta_{kj} y_k u_j,$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, conformément à la composition ordinaire,

$$A\Gamma = \Sigma a_{ig} \gamma_{gl} x_i v_l, \qquad B\Delta = \Sigma b_{kh} \delta_{hj} y_k u_j,$$
$$\Gamma B = \Sigma \gamma_{ih} b_{hl} x_i v_l, \qquad \Delta A = \Sigma \delta_{kg} a_{gj} y_k u_j,$$
$$\Gamma\Delta = \Sigma \gamma_{ih} \delta_{hj} x_i u_j, \qquad \Delta\Gamma = \Sigma \delta_{kg} \gamma_{gl} y_k v_l$$
$$(i, j, g = 1, 2, \ldots, m;\ k, l, h = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit par là que les formes $A\Gamma$ et ΓB appartiennent au système de formes Γ et les formes $B\Delta$ et ΔA au système de formes Δ, et que, de même, les formes $\Gamma\Delta$ et $\Delta\Gamma$ appartiennent respectivement aux deux groupes de formes A et B.

En utilisant les expressions précédentes on voit aisément que :

Les opérations $A \times B$ *et* $\Gamma \times \Delta$ *sont liées entre elles et à la com-*

position ordinaire des formes bilinéaires par les relations fondamentales suivantes :

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2,$$
$$(A \times B)(\Gamma \times \Delta) = A\Gamma \times B\Delta,$$
$$(\Gamma \times \Delta)(A \times B) = \Gamma B \times \Delta A,$$
$$(\Gamma_1 \times \Delta_1)(\Gamma_2 \times \Delta_2) = \Gamma_1 \Delta_2 \times \Delta_1 \Gamma_2.$$

La signification de la première de ces relations est déjà connue. Quant aux autres, elles font voir que le produit d'une substitution $A \times B$ par une substitution $\Gamma \times \Delta$, soit d'une substitution $\Gamma \times \Delta$ par une substitution $A \times B$, est encore une substitution du système $\Gamma \times \Delta$, et que le produit de deux substitutions $\Gamma \times \Delta$ est une substitution du groupe $A \times B$.

On remarquera aussi que l'on a

$$(E \times F)(\Gamma \times \Delta) = (\Gamma \times \Delta)(E \times F) = \Gamma \times \Delta.$$

Du reste les substitutions $\Gamma \times \Delta$ n'appartiennent pas, en général, au groupe $A \times B$. On ne peut avoir, en effet, la relation

$$A \times B = \Gamma \times \Delta,$$

qui équivaut à l'identité algébrique

$$(\Sigma a_{ij} x_i u_j)(\Sigma b_{kl} y_k v_l) \equiv (\Sigma \gamma_{il} x_i v_l)(\Sigma \delta_{kj} y_k u_j),$$

que dans le cas où il y a quatre formes linéaires a_x, b_y, u_α, v_β telles que l'on ait

$$A = a_x u_\alpha, \qquad B = b_y v_\beta, \qquad \Gamma = a_x v_\beta, \qquad \Delta = b_y u_\alpha.$$

57. Dans le cas où $m \neq n$ l'un des deux déterminants $|\Gamma\Delta|$, $|\Delta\Gamma|$ est identiquement nul. En particulier, si $m > n$, on a

$$|\Gamma\Delta| = 0, \qquad |\Delta\Gamma| \neq 0,$$

tandis que, si $m < n$, on a

$$|\Gamma\Delta| \not\equiv 0, \qquad |\Delta\Gamma| \equiv 0.$$

Il suit de là que, lorsque $m \neq n$, on a

$$|\Gamma \times \Delta| \equiv 0.$$

En effet, comme

$$(\Gamma \times \Delta)^2 = \Gamma\Delta \times \Delta\Gamma$$

on doit avoir (d'après le n° 9),

$$|\Gamma \times \Delta|^2 \equiv |\Gamma\Delta|^n |\Delta\Gamma|^m \equiv 0.$$

D'autre part, lorsque $m = n$, on a

$$|\Gamma\Delta| = |\Delta\Gamma| = |\Gamma||\Delta|$$

et

$$|\Gamma \times \Delta| = |\Gamma|^m |\Delta|^m.$$

38. Si l'on part des formes

$$\Gamma = \Sigma \gamma_{il} x_i v_l \qquad \text{et} \qquad \Delta = \Sigma \delta_{kj} y_k u_j,$$

on peut considérer les produits bialternés Γ^s et Δ^s, de s formes égales à Γ ou à Δ.

On aura ainsi

$$\Gamma^s = \Sigma \gamma_{(l)}^{(i)} \overline{x}_{(i)} \overline{u}_{(l)},$$

où

$$\gamma_{(l)}^{(i)} = \gamma_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} = \Sigma \pm \gamma_{i_1 l_1} \gamma_{i_2 l_2} \cdots \gamma_{i_s l_s}$$

et

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_s, \qquad l_1 < l_2 < \ldots < l_s.$$

On aura, de même,

$$\Delta^s = \Sigma \delta_{(j)}^{(k)} \overline{y}_{(k)} \overline{u}_{(j)},$$

où

$$\delta^{k}_{l} = \delta^{k_1 k_2 \ldots k_s}_{l_1 l_2 \ldots l_s} = \Sigma \pm \delta_{k_1 l_1} \delta_{k_2 l_2} \ldots \delta_{k_s l_s}$$

et

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_s, \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_s.$$

On aura donc pour le produit mixte $\Gamma^s \times \Delta^s$

$$\Gamma^s \times \Delta^s = \Sigma \gamma^{ij}_{il} \delta^{k}_{j} \overline{x}^{i}_{k} \overline{u}^{l}_{j}.$$

Il se trouve maintenant que *si l'on applique aux* X_{jl} *la substitution* $\Gamma \times \Delta$, *qui remplace* X_{jl} *par* $\Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} X_{ik}$, *les expressions*

$$X^{l}_{l} = X^{l_1 l_2 \ldots l_s}_{l_1 l_2 \ldots l_s} = \Sigma \pm X_{l_1 l_1} X_{l_2 l_2} \ldots X_{l_s l_s}$$

sont soumises à la substitution $\Gamma^s \times \Delta^s$, *qui remplace* X^{l}_{l} *par*

$$\Sigma \gamma^{ij}_{il} \delta^{k_j}_{j} X^{i}_{k_j}.$$

Et, plus généralement :

Si en partant de s formes

$$X_1 = \Sigma X_{jl} u_j v_l, \qquad X_2 = \Sigma X'_{jl} u_j v_l, \qquad \ldots$$

on considère leur produit bialterné

$$X_1 . X_2 \ldots X_s = \Sigma X^{l}_{(l)} \overline{u}_{(j)} v_l,$$

les coefficients X^{l}_{l} *de cette forme ont la propriété d'être soumis à la substitution* $\Gamma^s \times \Delta^s$, *lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $\Gamma \times \Delta$.

On peut démontrer cette propriété en remarquant que :

Lorsqu'on soumet les formes $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *aux substitutions* Γ, Δ, *opérées respectivement sur les variables u et v, dont* Γ *remplace* u_i *par* $\Sigma \gamma_{il} v_l$ *et* Δ *remplace* v_k *par* $\Sigma \delta_{kj} u_j$, *on obtient s nou-*

celles formes $\Gamma' X_1 \Delta$, $\Gamma' X_2 \Delta$, ..., $\Gamma' X_s \Delta$ *dont le produit bialterné*

$$\Gamma' X_1 \Delta . \Gamma' X_2 \Delta \ldots \Gamma' X_s \Delta$$

coïncide avec la forme

$$(\Gamma'^{\dot{s}})(X_1 . X_2 \ldots X_s)\Delta^{\dot{s}},$$

qu'on obtient en soumettant, dans la forme $X_1 . X_2 \ldots X_s$, *les variables* $\bar{u}_{(i)}$ *et* $\bar{v}_{(k)}$ *aux substitutions* $\Gamma'^{\dot{s}} = (\Gamma^{\dot{s}})'$ *et* $(\Delta^{\dot{s}}) = (\Delta^{\dot{s}})'$.

Il est à remarquer que, dans le cas où $m < n$, la forme $\Gamma^m \times \Delta^m$ devient le produit de deux facteurs linéaires puisqu'on a

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\dot{m}} \times \Delta'^{\dot{m}} &= \Sigma \gamma_{(l_1)}^{(i)} \delta_{(j)}^{(k)} \bar{x}_k^{(i)} \bar{u}_{l_1}^{(j)} \\ &= \left(\Sigma \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{12 \ldots m} \bar{u}_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{12 \ldots m}\right)\left(\Sigma \delta_{12 \ldots m}^{k_1 k_2 \ldots k_m} \bar{x}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{12 \ldots m}\right).\end{aligned}$$

Il en est de même pour la forme $\Gamma'^{\dot{n}} \times \Delta'^{\dot{n}}$ dans le cas où $m > n$.

39. Le cas le plus intéressant pour les substitutions $\Gamma \times \Delta$ est celui où l'on a $m = n$, car alors le déterminant $|\Gamma \times \Delta|$ n'est pas identiquement nul.

Si, dans ce cas, on représente par Θ et Π les deux formes

$$\Theta = \Sigma x_i v_i, \qquad \Pi = \Sigma y_k u_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$\Theta \times \Pi = \Sigma X_{ik} U_{ki}.$$

On voit par là que *la substitution* $\Theta \times \Pi$ *a pour effet de remplacer* X_{ik} *par* X_{ki}, c'est-à-dire de faire retourner le déterminant $|A|$ autour de sa diagonale principale.

On a également

$$\begin{aligned}(\Theta \times \Pi)^2 &= \Theta\Pi \times \Pi\Theta = E \times F, \\ (\Gamma \times \Delta)(\Theta \times \Pi) &= \Gamma\Pi \times \Delta\Theta, \\ (\Theta \times \Pi)(\Gamma \times \Delta) &= \Theta\Delta \times \Pi\Gamma\end{aligned}$$

et aussi

$$\Gamma \times \Delta = (\Gamma\Pi \times \Delta\Theta)(\Theta \times \Pi) = (\Theta \times \Pi)(\Theta\Delta \times \Pi\Gamma)$$

On voit ainsi que *la substitution* $\Gamma \times \Delta$ *peut être obtenue, soit en composant la transformation* $\Gamma\Pi \times \Delta\Theta$ (*qui appartient au groupe* $A \times B$) *avec* $\Theta \times \Pi$, *soit en combinant* $\Theta \times \Pi$ *avec la transformation* $\Theta\Delta \times \Pi\Gamma$ (*qui appartient également au groupe* $A \times B$).

Dans le cas actuel, où l'on a

$$\Gamma^{\dot{m}} \times \Delta^{\dot{m}} = |\Gamma||\Delta| \overline{x}^{12\ldots m}_{12\ldots m} \overline{u}^{12\ldots m}_{12\ldots m},$$

il se trouve que *si dans le déterminant* $|X|$ *on soumet les* X_{jl} *à la transformation* $\Gamma \times \Delta$, *ce déterminant se reproduit multiplié par* $\Gamma\,|\Delta|$. *Il en est de même pour l'expression*

$$|X_1 . X_2 \ldots X_m| = X^{12\ldots m}_{12\ldots m}.$$

40. En résumant les résultats précédents pour le cas où $m = n$, on voit que

Les seules transformations linéaires des éléments X_{jl} *d'un déterminant qui établissent des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre de ce déterminant, sont :* 1° *les transformations du groupe* $A \times B$; 2° *la transformation* $\Theta \times \Pi$, *qui remplace* X_{jl} *par* X_{lj}; 3° *les transformations qu'on obtient en composant les transformations* $A \times B$ *avec* $\Theta \times \Pi$, *soit* $\Theta \times \Pi$ *avec les transformations* $A \times B$. *Ce troisième système est constitué par les transformations* $\Gamma \times \Delta$, *au nombre desquelles appartient aussi la transformation* $\Theta \times \Pi$.

Dans le cas où $m = n = 2$, les transformations $A \times B$ constituent un groupe identique à celui des homographies de l'espace qui laissent invariable une surface du second degré, à discriminant différent de zéro, en transformant en lui-même chacun de ses deux systèmes de droites, tandis que les transformations $\Gamma \times \Delta$ correspondent aux homographies de l'espace qui échangent entre eux ces deux systèmes de droites.

Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Je me suis occupé dans plusieurs Mémoires de l'extension du problème de Dirichlet aux équations aux dérivées partielles du second ordre. Ayant repris, l'année dernière, cette question dans mon Cours, j'ai complété et précisé ces recherches sur quelques points [1]; c'est ce que je me propose d'indiquer ici en priant le lecteur de se reporter d'abord à un de mes Mémoires sur ce sujet (*Comptes rendus*, 10 décembre 1888, et *Journ. de Math.*, 1890).

Nous nous bornons ici à l'équation linéaire

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

et nous supposons seulement que d, e, f sont des fonctions continues des variables réelles x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues [2].

[1] Un résumé en a été donné dans les *Comptes rendus* (19 juin 1899).

[2] Si les coefficients sont analytiques, on peut arriver dans le problème qui nous occupe à des résultats plus généraux; c'est ce que j'ai montré (*Comptes rendus*, 19 février et 23 avril 1900).

I.

1. Une étude préliminaire indispensable est relative à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{2}$$

Nous considérons un contour simple C régulièrement analytique, c'est-à-dire formé par une seule ligne analytique, et nous supposons que la fonction $f(x, y)$ soit continue dans l'aire limitée par C, ainsi que ses dérivées partielles, que nous supposons exister, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On suppose que l'on ait

$$|f(x, y)| < F, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < F_1 \qquad \text{(dans C et sur C)},$$

F et F_1 étant deux constantes. Si l'on désigne par v la solution continue de l'équation (2) s'annulant sur C, il est classique que cette intégrale est donnée par la formule

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

L'intégrale double est étendue à l'aire limitée par C, et la fonction G représente la fonction de Green relative au contour C et ayant le point logarithmique (x, y).

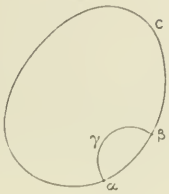
Il est bien connu qu'avec les hypothèses faites sur f, la fonction v a des dérivées premières et secondes *à l'intérieur* de C, qu'elle satisfait à la relation (2), et qu'elle s'annule sur le contour. Nous avons besoin pour la suite de nous assurer que ces dérivées restent finies sur le contour supposé, comme nous l'avons dit, régulièrement analytique, et *de trouver une limite supérieure de leurs valeurs absolues*.

J'utiliserai pour cela une transformation faite par M. Paraf dans sa thèse. Désignons par a et b les deux variables indépendantes, de sorte que nous considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} = f(a, b).$$

Soit C le contour donné; prenons sur lui un arc suffisamment petit, $\alpha\beta$, et traçons l'arc $\alpha\gamma\beta$. La fonction $v(a, b)$ prend la valeur *zéro* sur $\alpha\beta$

Fig. 1.



et prend certaines valeurs sur $\alpha\gamma\beta$. Soit $u(a, b)$ la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs que $v(a, b)$ sur le contour fermé $\alpha\gamma\beta\alpha$. Si l'on pose

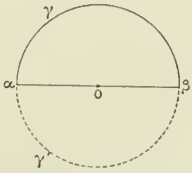
$$v = u + w,$$

w s'annulera sur le contour $\alpha\gamma\beta\alpha$, et l'on aura

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = f(a, b).$$

Nous ne diminuerons pas la généralité, en supposant que $\alpha\beta$ se réduise à une droite, car on peut toujours transformer $\alpha\beta$ en une droite

Fig. 2.



par une représentation conforme, puisque l'arc $\alpha\beta$ est analytique; la fonction f se trouve seulement multipliée par un facteur restant fini et dépendant seulement du contour. On peut supposer, de plus, que $\alpha\gamma\beta$ soit une demi-circonférence. Nous allons montrer que les dérivées des

deux premiers ordres u et v tendent vers des limites, quand (a, b) tend vers un point O (le milieu, si l'on veut) de $\alpha\beta$.

Prenons, à cet effet, le demi-cercle $\alpha\gamma'\beta$, symétrique de $\alpha\gamma_1\beta$, et formons la fonction harmonique dans le cercle prenant sur $\alpha\gamma_1\beta$ les valeurs de u et sur $\alpha\gamma'\beta$ des valeurs égales et de signes contraires aux points symétriques par rapport à $\alpha\beta$. La fonction harmonique ainsi formée coïncidera avec u dans le demi-cercle supérieur; nous aurons donc en O des valeurs finies pour toutes les dérivées de u.

Passons à v. *Prolongeons* la fonction $f(a, b)$ dans le cercle $\alpha\gamma'\beta$ par l'hypothèse qu'en deux points symétriques, la fonction ait des valeurs égales et de signes contraires. La fonction f ainsi formée sera discontinue le long de $\alpha\beta$, et ce sera une discontinuité du genre de celles envisagées par Dirichlet, c'est-à-dire avec saut brusque fini. En désignant par

$$G_1(x, y; a, b),$$

la fonction de Green relative au cercle $\gamma\gamma'$, nous formons l'intégrale

$$(4) \qquad -\frac{1}{2\pi}\int\int G_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue au cercle $\gamma\gamma'$. Elle satisfera bien à l'équation (3); elle s'annulera d'ailleurs le long du diamètre $\alpha\beta$, car, lorsque (a, b) est sur le diamètre $\alpha\beta$, la fonction $G_1(x, y; a, b)$ a les mêmes valeurs pour deux points (x, y) symétriques, et comme f a des valeurs de signes contraires, on aura zéro comme valeur de l'intégrale. Donc l'intégrale (4) coïncide avec v. Il est alors facile de calculer les dérivées de v. On aura

$$\frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G_1}{\partial a} f(x, y)\, dx\, dy,$$

et il est clair que sa valeur en O aura un sens parfaitement déterminé. Par suite, en tout point du contour, il y a des dérivées $\frac{\partial v}{\partial a}$ et $\frac{\partial v}{\partial b}$.

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue maxima de $\frac{\partial v}{\partial a}$ et $\frac{\partial v}{\partial b}$. En effet, $\frac{\partial u}{\partial a}$ et $\frac{\partial u}{\partial b}$ ont en O des dérivées limitées en fonction de F (valeur absolue maxima de f), puisque la valeur

de u sur la circonférence $\gamma\gamma'$ est limitée en fonction de F. On aura de même, d'après l'analyse précédente, $\frac{\partial w}{\partial a}$ et $\frac{\partial w}{\partial b}$ limités en fonction de F; *par suite, on a*

$$\left|\frac{\partial v}{\partial a}\right| < \mu F, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial b}\right| < \mu F \qquad \text{(dans C et sur C)},$$

μ étant une constante *ne dépendant que de l'aire*, et *nullement* de la fonction f. Il est clair que l'on a aussi

$$|v| < \lambda F,$$

λ étant une constante de même nature que μ.

2. Occupons-nous maintenant des dérivées secondes de v. Nous posons toujours

$$v = u + w.$$

La fonction harmonique a des dérivées secondes en O et nous avons vu que

$$w = -\frac{1}{2\pi}\int\int G_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy.$$

D'après ce que nous savons, w a des dérivées secondes en O; mais il faut reprendre ce point avec quelques détails pour avoir une limite de ces dérivées secondes. On peut écrire

$$G_1(x, y; a, b) = \log\frac{1}{r} - \omega_1(x, y; a, b),$$

où r désigne la distance de (x, y) à (a, b), et où ω_1 est une fonction harmonique de (x, y) s'annulant sur la circonférence $\gamma\gamma'$.

On a donc

$$\begin{aligned} w(a, b) = &-\frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r} f(x, y)\, dx\, dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\int \omega_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

La seconde intégrale ne présente aucune difficulté : elle a, au point O, des dérivées secondes limitées au moyen de F. Posons

$$w_1(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Des intégrations par parties donnent immédiatement

$$\frac{\partial w_1}{\partial a} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\gamma'\beta\gamma} \log\frac{1}{r} f\, dy - \frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial b} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\gamma'\beta\gamma} \log\frac{1}{r} f\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\beta} \log\frac{1}{r}(f_1 - f_2)\, dx$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Dans cette dernière formule, nous désignons par f_1 la valeur de f sur le bord supérieur de $\alpha\beta$ et par f_2 sa valeur sur le bord inférieur, de sorte que, en réalité, $f_1 = -f_2 =$ la valeur de la fonction donnée f sur $\alpha\beta$.

Le calcul des valeurs de $\frac{\partial^2 w_1}{\partial a^2}$ et de $\frac{\partial^2 w_1}{\partial a\, \partial b}$ en O ne présente aucune difficulté avec la première de ces formules; ces dérivées sont limitées en fonction linéaire de F et de F_1. Il ne peut y avoir de difficultés que pour $\frac{\partial^2 w_1}{\partial b^2}$, à cause du terme où l'intégration se fait sur $\alpha\beta$. On doit former l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial b}\log\frac{1}{r}\cdot(f_1 - f_2)\, dx.$$

Si le point O est pris comme origine et si $O\beta$ est l'axe des x, l'axe Oy étant perpendiculaire et du côté de γ, cette intégrale peut s'écrire

$$\int_{-R}^{+R} \frac{b\, dx}{(x-a)^2 + b^2}(f_1 - f_2) \qquad (O\alpha = O\beta = R).$$

Il faut étudier la valeur de cette intégrale, quand a et b tendent vers zéro (b étant positif). Or l'intégrale précédente est moindre en valeur

absolue que

$$2F\int_{-R}^{+R}\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2}=2F\times(\text{angle }\alpha A\beta),$$

en appelant A le point (a, b).

Il suit de là que l'on a pour les trois dérivées secondes des limites supérieures qui sont fonctions linéaires de F et F_1.

De l'analyse précédente, nous concluons donc le théorème suivant :

Le contour C *étant régulièrement analytique, et la fonction* $f(x, y)$ *étant continue ainsi que ses dérivées* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *l'intégrale* v *de l'équation*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=f(x, y)$$

s'annulant sur C, *a des dérivées premières et secondes continues dans* C *et sur* C, *et l'on a*

$$|v|<\lambda F,$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|<\mu F,$$

et enfin

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|<\lambda_1 F+\mu_1 F_1.$$

λ, μ, λ_1 *et* μ_1 *sont des constantes positives dépendant uniquement du contour* C *et nullement de la fonction* $f(x, y)$.

5. Il est important pour nous d'établir que *les trois constantes* λ, μ *et* μ_1 *sont très petites si le contour est très petit;* la quatrième constante λ_1 garde une valeur finie, mais non très petite.

La démonstration va bien préciser ce qui peut rester de vague dans cet énoncé. Soit dans le plan (x, y) une courbe fermée régulièrement analytique γ, contenant l'origine à son intérieur. Nous posons

$$x=\alpha X, \qquad y=\alpha Y.$$

Si α est grand, on a dans le plan (X, Y) une petite aire limitée par une courbe Γ.

Envisageons l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = f(X, Y),$$

f étant une fonction donnée dont le maximum est F et dont les dérivées du premier ordre ont pour maximum F_1 dans une certaine région autour de l'origine, et désignons par U l'intégrale de cette équation s'annulant sur Γ. Si l'on transforme l'équation et qu'on pose

$$U(X, Y) = u(x, y),$$

on aura

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right).$$

Pour le contour γ, il existe des constantes λ et μ, et l'on aura alors

$$|u(x, y)| < \frac{\lambda}{\alpha^2} F,$$

et pareillement

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{\mu}{\alpha^2} F.$$

On en conclut donc

$$|U(X, Y)| < \frac{\lambda}{\alpha^2} F, \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial X}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right| < \frac{\mu}{\alpha} F.$$

Pour le contour Γ, les constantes λ et μ sont donc devenues $\frac{\lambda}{\alpha^2}$ et $\frac{\mu}{\alpha}$; elles sont très petites si le contour Γ est très petit, c'est-à-dire si α est très grand.

Des considérations analogues s'appliquent aux dérivées secondes; nous avions plus haut l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

en posant

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right).$$

Donc

$$|\varphi| < \frac{F}{\alpha^2}, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < \frac{F_1}{\alpha^4}.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

on tire de l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| < \lambda_1 \frac{F}{\alpha^2} + \mu_1 \frac{F_1}{\alpha^3},$$

l'inégalité suivante

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right| < \lambda_1 F + \frac{\mu_1}{\alpha} F_1.$$

Donc, pour le contour Γ, la constante μ_1 se trouve remplacée par $\frac{\mu_1}{\alpha}$ et est donc très petite si le contour est très petit, c'est-à-dire si α est très grand.

Le théorème énoncé est donc établi (¹).

4. Passons maintenant à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

On se propose de trouver l'intégrale continue de cette équation prenant des valeurs données *sur un contour γ régulièrement analytique suffisamment petit*. Mon objet ici est seulement de bien préciser les hypothèses, ce que j'avais négligé de faire dans mon précédent Mémoire. Nous supposons d'abord que a, b, c sont continues et ont des dérivées partielles continues du premier ordre. Nous supposons de plus que *la succession des valeurs données sur le contour forme une fonction continue ayant des dérivées des trois premiers ordres.*

(¹) Dans mon Mémoire de 1890, je m'étais borné à énoncer ce résultat.

On peut évidemment alors trouver une fonction continue $\lambda(x, y)$ ayant des dérivées jusqu'au troisième ordre et prenant les valeurs données sur γ. En remplaçant alors u par $u + \lambda$, notre équation devient

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu + D,$$

les fonctions A, B, C, D ayant des dérivées partielles du premier ordre. Il s'agit maintenant de *trouver l'intégrale de cette équation s'annulant sur un contour γ, quand ce contour est suffisamment petit.* Conformément à la méthode que nous suivons dans ce genre de recherches, nous faisons une succession d'approximations

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = D,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = A\frac{\partial u_0}{\partial x} + B\frac{\partial u_0}{\partial y} + Cu_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = A\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + B\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + Cu_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On intègre ces équations en supposant que tous les u s'annulent sur le contour γ. Toutes les conditions voulues par la théorie, relative à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

exposée dans les paragraphes précédents sont bien réalisées. La première équation donne u_0 qui a des dérivées premières et secondes dans et sur γ; dans la seconde équation, le second membre a des dérivées partielles du premier ordre, et l'on peut par suite déterminer u_1, qui a des dérivées partielles du premier et du second ordre dans et sur γ, et ainsi de suite. En s'appuyant alors sur les résultats des n^{os} **2** et **5**, et sans rien changer aux calculs faits dans le Mémoire cité, on voit que les séries formées avec les u et leurs dérivées premières et secondes sont absolument et uniformément convergentes dans l'aire limitée par

γ, *si cette aire est suffisamment petite*. Il en résulte immédiatement que la fonction u, représentée par la série

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

a des dérivées premières et secondes dans γ, et qu'elle satisfait à l'équation différentielle (5).

Ainsi, pour un contour γ régulièrement analytique et suffisamment petit, nous avons obtenu l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

prenant sur γ une succession donnée de valeurs. Nous avons mis en évidence les hypothèses qui n'avaient pas été explicitement formulées, à savoir que la succession donnée des valeurs sur le contour *avait des dérivées des trois premiers ordres*. Relativement à a, b, c, ce sont des fonctions continues de x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre.

Il est bien probable que la méthode suivie d'approximations successives conduit à la solution du problème posé dans des hypothèses plus générales, notamment en supposant que le contour est formé de plusieurs morceaux de lignes analytiques, mais les *pointes* demanderont alors une discussion spéciale.

Si les coefficients a, b, c étaient des fonctions analytiques de x et y, on pourrait avoir un énoncé plus étendu. J'ai montré dans les Notes citées au début que l'on peut alors traiter le problème en supposant seulement que la succession des valeurs sur γ soit continue et sans faire aucune hypothèse relative aux dérivées; je développerai d'une manière complète les calculs relatifs à ce cas dans un autre travail.

3. Je termine par une dernière remarque. Dans le cas particulier où a et b sont identiquement nuls, et où l'on a, par suite, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

la question est beaucoup plus facile. Il n'y a alors aucune hypothèse à faire sur l'existence de dérivées pour la succession des valeurs données sur le contour et le contour suffisamment petit n'est assujetti à d'autres conditions que celles qu'il est nécessaire de faire pour être assuré de l'existence de la fonction de Green; mais il est inutile d'insister sur ce cas bien élaboré par M. Schwarz dans son célèbre Mémoire du jubilé de Weierstrass.

Les invariants des formes binaires;

PAR M. GORDAN.

Le système des formes binaires est fini. J'ai démontré ce théorème et M. Hilbert l'a étendu aux formes de n variables.

Dans cette Note, un théorème est donné, dont les autres découlent.

CHAPITRE PREMIER.

LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES PRODUITS.

I. — Les systèmes des produits.

Les produits de n variables

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

forment un système S si les exposants sont liés par des relations

$$(1) \qquad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots.$$

Ces relations définissent S.

Premier exemple. — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système

$$(S) \qquad x_1^3, \quad x_1^6, \quad x_1^9, \quad \ldots.$$

Deuxième exemple. — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système

$$(S) \qquad x_1^3, \quad x_1^4 x_2^2, \quad x_3^7 x_4^2, \quad \ldots.$$

Troisième exemple. — Les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

définissent le système

$$(S) \qquad x_1^2 x_2, \quad x_1 x_2 x_4^4, \quad x_1 x_3^2 x_4^3, \quad \ldots.$$

II. — Les systèmes élémentaires.

Il peut arriver que les produits T de S soient divisibles les uns par les autres. Si l'on néglige les produits T, qui sont divisibles par d'autres T, il reste un système partiel Σ; il est appelé le *système élémentaire*, défini par les relations (1). Il contient les produits

$$(\Sigma) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \ldots,$$

qui ont les propriétés suivantes :

1° Les exposants k satisfont aux relations (1);

2° Aucun P n'est divisible par un autre;

3° Chaque produit T de S est divisible par un au moins des P.

Premier exemple. — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système élémentaire

$$(\Sigma) \qquad x_1^3.$$

Deuxième exemple. — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système élémentaire

$$\begin{array}{ll} (2) & \left\{ x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1^2x_4,\ x_1x_2^2,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_3^2,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_4^2, \right. \\ (\Sigma) & \left\{ x_2^3,\ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_3x_4,\ x_2x_4^2,\ x_3^3,\ x_3^2x_4,\ x_3x_4^2,\ x_4^3. \right. \end{array}$$

Ce sont les termes d'une forme quaternaire cubique dans l'ordre usuel. Je considère chacun d'eux comme *compliqué* par rapport à ceux qui le suivent et ces derniers comme plus *simples;* ainsi x_4^3 est le terme le plus simple et x_1^3 le terme le plus compliqué.

Troisième exemple. — Les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 > 0$$

définissent le système élémentaire

$$\begin{array}{ll} (3) & \left\{ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1^2x_4,\ x_1x_2^2,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_3^2,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_4^2, \right. \\ (\Sigma) & \left\{ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_3x_4,\ x_2x_4^2,\ x_3^2x_4,\ x_3x_4^2. \right. \end{array}$$

III. — Les indices des systèmes élémentaires.

Le nombre des produits, contenus dans le système élémentaire Σ, est appelé l'*indice* de Σ. Si ces produits sont composés par n variables, je représente cet indice par h_n. Si l'on a plusieurs systèmes élémentaires

$$\Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \Sigma_3,\quad \ldots,$$

je représente leurs indices par

$$h_{n,1}, \quad h_{n,2}, \quad h_{n,3}.$$

Si $n = 1$, on a

$$(4) \qquad h_1 \leq 1.$$

Premier exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3)$$

a l'indice $h_1 = 1$.

Deuxième exemple — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3)$$

a l'indice $h_1 = 20$.

Troisième exemple. — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3),$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a l'indice $h_1 = 16$.

IV. — Des systèmes partiels du système élémentaire Σ.

Si le produit

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$$

est contenu dans le système élémentaire Σ, on peut former les systèmes partiels

L_0 $$P_1,$$

L_1 $$x_1^{g} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \ldots x_n^{\lambda_n} = x_1^{g} Q,$$

où

$$g \leq \lambda_1;$$

L_2 $$x_1^{\lambda_1} x_2^{g-\lambda_1} x_3^{\lambda_3} \ldots x_n^{\lambda_n} = x_2^{g-\lambda_1} Q,$$

où

$$\lambda_1 < g \leq \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$L_3 \qquad x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} x_4^{k_4} \ldots x_n^{k_n} = x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 < g \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$L_g \qquad x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{n-1}} = x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{n-1}} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} < g.$$

Leur nombre est

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 + \rho.$$

Premier exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3)$$

n'a pas de systèmes partiels.

Deuxième exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3)$$

a les systèmes partiels

$$L_1 \qquad P_1 = x_1^3,$$

$$L_2 \qquad x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_3,$$

$$L_3 \qquad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$$L_4 \qquad x_2^3, \; x_2^2 x_3, \; x_2^2 x_4, \; x_2 x_3^2, \; x_2 x_3 x_4, \; x_2 x_4^2, \; x_3^3, \; x_3^2 x_4, \; x_3 x_4^2, \; x_4^3.$$

Troisième exemple. — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3),$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a les systèmes partiels

$$L_0 \qquad P_1 = x_1^2 x_2,$$

$$L_1 \qquad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$$L_2 \qquad x_2^2 x_3, \quad x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2,$$

$$L_4 \qquad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4, \quad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2.$$

V. — Relation pour l'indice h_n.

Si le produit

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

est contenu dans Σ et diffère de

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n},$$

il n'est pas divisible par P_1; il a du moins un exposant

$$k_\sigma < \lambda_\sigma$$

et est contenu dans le système partiel L_g, où

$$k_\sigma = g - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{\sigma-1}.$$

Tous les P de Σ sont contenus dans les L. Si l'on représente le nombre de produits contenus dans L_g par l_g, on a

$$(5) \qquad h_n < 1 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\rho.$$

Premier exemple.

$$(5) \qquad h_1 = 1, \qquad l_g = 0.$$

Deuxième exemple.

$$(5) \quad h_4 = 20, \quad l_1 = 3, \quad l_2 = 6, \quad l_3 = 10, \quad 20 = 1 + 3 + 6 + 10.$$

Troisième exemple.

$$(5) \quad h_4 = 16, \quad l_1 = 6, \quad l_2 = 7, \quad l_3 = 7, \quad 16 < 1 + 6 + 7 + 7.$$

VI. — Les systèmes correspondants.

Les produits situés dans le système partiel L_g sont de la forme

$$L_g \qquad x_\sigma^r Q_1, \quad x_\sigma^r Q_2, \quad x_\sigma^r Q_3, \quad \ldots,$$

et aucun d'eux n'est divisible par un autre. Le système

$$\Sigma_g \qquad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots$$

correspond au système L_g.

Les Q ne sont composés que par les $n-1$ variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{\sigma-1}, \quad x_{\sigma+1}, \quad \ldots, \quad x_n;$$

aucun d'eux n'est divisible par un autre. Les exposants k des Q sont assujettis à des relations

$$(1_a) \qquad H_1, \quad H_2, \quad \ldots$$

dérivées des relations

$$(1) \qquad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots.$$

Les Σ_g sont des systèmes élémentaires, définis par les relations (1_a).

Premier exemple. — Comme il n'y a aucun L_g, il n'y a pas non plus de systèmes correspondants Σ_g.

Deuxième exemple. — Aux systèmes partiels

$$L_1 \qquad x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4,$$

$$L_2 \qquad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$$L_3 \quad x_2^3, \; x_2^2 x_3, \; x_2^2 x_4, \; x_2 x_3^2, \; x_2 x_3 x_4, \; x_2 x_4^2, \; x_3^3, \; x_3^2 x_4, \; x_3 x_4^2, \; x_4^3,$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\Sigma_1 \qquad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

$$\Sigma_2 \qquad x_2^2, \quad x_2 x_3, \quad x_2 x_4, \quad x_3^2, \quad x_3 x_4, \quad x_4^2,$$

$$\Sigma_3 \quad x_2^3, \; x_2^2 x_3, \; x_2^2 x_4, \; x_2 x_3^2, \; x_2 x_3 x_4, \; x_2 x_4^2, \; x_3^3, \; x_3^2 x_4, \; x_3 x_4^2, \; x_4^3,$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & \text{par} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 1 \pmod 3, \\ \Sigma_2 & \text{»} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 2 \pmod 3, \\ \Sigma_3 & \text{»} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3. \end{array}$$

Troisième exemple. — Aux systèmes partiels

$$\begin{array}{lllllllll} L_1 & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, & & \\ L_2 & x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, & \\ L_3 & x_1^2x_3, & x_1^2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, & \end{array}$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\begin{array}{lllllllll} \Sigma_1 & & x_2^2, & x_2x_3, & x_2x_4, & x_3^2, & x_3x_4, & x_4^2, & \\ \Sigma_2 & x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, & \\ \Sigma_3 & x_1^2x_3, & x_1^2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2; & \end{array}$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & \text{par} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 2 \pmod 3, \\ \Sigma_2 & & \left\{ \begin{array}{l} k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3, \\ k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 > 0 \end{array} \right. \\ \Sigma_3 & \text{»} & \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3, \\ k_1k_3 + k_1k_4 + k_3k_4 > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

VII. — Relations entre les indices de plusieurs systèmes.

Le nombre des produits P contenus dans L_g égale celui des produits Q contenus dans Σ_g

$$l_g = h_{n-1-g}.$$

Aux formules (5) correspondent les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} h_n \leq 1 + h_{n-1,1} + h_{n-1,2} + \ldots + h_{n-1,\rho}, \\ h_1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 1 + 3 + 6 + 10, \\ 16 < 1 + 6 + 7 + 7. \end{cases}$$

VIII. — Les indices des systèmes élémentaires sont des nombres finis.

Démonstration. — $h_1 = 1$ est un nombre fini. Les nombres

$$(7)\qquad \begin{cases} h_2 \leq 1 + h_{1,1} + h_{1,2} + \ldots + h_{1,\rho}, \\ h_3 \leq 1 + h_{2,1} + h_{2,2} + \ldots + h_{2,\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont aussi des nombres finis.

Les nombres ρ sont définis § IV par les degrés de produits quelconques contenus dans les Σ.

CHAPITRE II.

LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

I. — L'ordre des termes d'une fonction homogène.

Les termes d'une fonction homogène f de n variables sont des produits

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Nous les supposons écrits dans un ordre tel que chacun d'eux précède ceux qui sont plus simples. Le premier terme P_1 est le plus compliqué. Si l'on pose

$$f = c_1 P_1 + \chi,$$

les termes de χ sont plus simples que P_1.

II. — L'ordre des fonctions homogènes.

Nous classerons les fonctions homogènes

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots$$

d'après leurs degrés, les f des degrés inférieurs précédant celles des degrés supérieurs. Les formes du même degré sont arrangées d'après leurs premiers termes.

Celles dont les premiers termes sont simples précèdent celles dont les premiers termes sont plus compliqués.

Cet ordre est inverse de l'ordre des termes dans une fonction homogène. Les formes f étant ainsi ordonnées, nous considérerons chacune d'elles comme plus *simple* que celles qui la suivent.

III. — Le système S de fonctions homogènes.

Des relations

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots,$$

qui lient les coefficients des fonctions homogènes, définissent un système (S) constitué par l'ensemble des fonctions homogènes

$$(S) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots$$

dont les coefficients satisfont à ces relations. Les f de (S) sont arrangées d'après le n° II. Des systèmes dont les fonctions homogènes sont simples sont appelés *simples*.

IV. — Des systèmes dérivés.

D'un système donné de fonctions homogènes

$$(S) \qquad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots,$$

on peut faire dériver d'autres systèmes

$$(8)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1, \\ \eta_2 = A_{21}\xi_1 + \xi_2, \\ \eta_3 = A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + \xi_3, \\ \eta_4 = A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + \xi_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les A sont des fonctions quelconques, qui font les fonctions η homogènes.

V. — Réduction des systèmes dérivés.

Il peut arriver que, parmi les η d'un système dérivé M

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots,$$

il y ait deux fonctions (n° I)

$$\eta_\lambda = c_\lambda P_\lambda + \chi_\lambda,$$
$$\eta_\mu = c_\mu P_\mu + \chi_\mu,$$

telles que le premier terme P_λ de η_λ soit divisible par le premier terme P_μ de η_μ

$$P_\lambda = RP_\mu.$$

Dans ce cas je forme l'agrégat

$$(9)\qquad \overline{\eta_\lambda} = \eta_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R\eta_\mu = \chi_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R\chi_\mu,$$

et je le substitue au lieu de η_λ dans le système M.

Soit M_1 le système qui résulte de cette substitution.

$\overline{\eta_\lambda}$ et M_1 sont plus simples que η_λ et M. M est réduit à M_1 par la substitution (9). Si l'on a

$$(10)\qquad \overline{\eta_\lambda} = 0,$$

le système M_1 contient une fonction de moins que M.

Dans ce cas on a, d'après (8),

$$(11) \qquad 0 = A_{\lambda 1}\varphi_1 + A_{\lambda 2}\varphi_2 + \ldots + A_{\lambda\lambda-1} + \varphi_{\lambda-1} + \varphi_\lambda,$$

c'est-à-dire φ_λ est un agrégat de fonctions φ plus simples.

VI. — Le système irréductible N.

Si l'on continue le procédé de réduction, on arrive à un système irréductible

$$(N) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots.$$

Les premiers termes des fonctions f sont des produits

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots,$$

dont aucun n'est divisible par un autre. Ils forment un système élémentaire Σ. Soit h son indice. Le système N contient h fonctions

$$(N) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots. \quad f_h.$$

VII. — Le système élémentaire L.

Si le nombre h est inférieur au nombre des fonctions φ, on peut réduire par la formule (11) tous les φ à des fonctions plus simples, excepté h fonctions. Représentons par Φ ces fonctions qui restent. Le système

$$(L) \qquad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_h$$

est appelé le *système élémentaire* défini par les relations

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots.$$

VIII. — Le théorème de Hilbert.

Tous les φ, excepté les Φ, sont des agrégats de fonctions φ plus simples. En continuant cette réduction, on arrive à la formule

$$\varphi = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \ldots + c_h\Phi_h. \tag{12}$$

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX INVARIANTS.

I. — Transformation des formes binaires.

La forme binaire

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} x_2^2 + \ldots$$

est transformée par la substitution

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 \\ x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 \end{array} \right. \tag{13}$$

dans la forme

$$f = A_0 y_1^n + \binom{n}{1} A_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} A_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \ldots.$$

Le déterminant de la substitution est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix},$$

et les coefficients A sont les polaires de f par rapport aux variables ξ, η.

II. — Développement en séries.

Chaque fonction homogène $F(x, y)$ de deux séries de variables cogrédientes

$$x_1, \quad x_2 \qquad \text{et} \qquad y_1, \quad y_2$$

peut être développée en une série dont les termes sont des produits des puissances de

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

et des polaires des covariants élémentaires de F. En posant symboliquement, si x et y ont le même degré dans F,

$$F(x, y) = r_x^m s_y^m,$$

on a la série

$$(14) \qquad F = \sum_k \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{2m-k+1}{k}} (\overline{r, s})_{y^k}^{m-k} (xy)^k.$$

III. — Le système élémentaire des invariants.

Les invariants i de f sont des fonctions entières homogènes φ des coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Les coefficients de φ satisfont aux relations

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots.$$

qui sont dérivées des équations partielles différentielles des invariants. Supposons le système élémentaire L des φ formé des invariants

$$(L) \qquad I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_h.$$

Chaque invariant i a, d'après le théorème de Hilbert, la forme

$$(15) \qquad i = c_1(a)\mathrm{I}_1 + c_2(a)\mathrm{I}_2 + \ldots + c_h(a)\mathrm{I}_h.$$

Les $c(a)$ sont des fonctions des a, qui font l'expression homogène.

IV. — Transformation de la formule (15).

Les invariants i de f obtiennent par la substitution (13) des puissances de Δ en facteurs.

Si les invariants

$$i, \quad \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{I}_3, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_h$$

ont les poids

$$\nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_h;$$

ils obtiennent les facteurs

$$\Delta^{\nu}, \quad \Delta^{\nu_1}, \quad \Delta^{\nu_2}, \quad \Delta^{\nu_3}, \quad \ldots, \quad \Delta^{\nu_h}.$$

La formule (15) est transformée par la substitution (13) en

$$(16) \qquad \Delta^{\nu} i = c_1(\mathrm{A})\Delta^{\nu_1}\mathrm{I}_1 + c_2(\mathrm{A})\Delta^{\nu_2}\mathrm{I}_2 + \ldots + c_h(\mathrm{A})\Delta^{\nu_h}\mathrm{I}_h.$$

V. — Simplification de la formule (16).

Les $c_g(\mathrm{A})$ sont des fonctions des polaires A et ils sont des covariants de f. En posant symboliquement

$$(17) \qquad \begin{cases} c_g(\mathrm{A}) = r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g}, \\ \dfrac{1}{\nu-\nu_g}\left(\overline{r_g, s_g}\right)^{\nu-\nu_g} = \mathrm{B}_g, \end{cases}$$

la formule (16) devient

$$\Delta^{\nu} i = r_{1,\xi}^{\nu-\nu_1} s_{1,\eta}^{\nu-\nu_1}\Delta^{\nu_1}\mathrm{I}_1 + r_{2,\xi}^{\nu-\nu_2} s_{2,\eta}^{\nu-\nu_2}\Delta^{\nu_2}\mathrm{I}_2 + \ldots + r_{h,\xi}^{\nu-\nu_h} s_{h,\eta}^{\nu-\nu_h}\Delta^{\nu_h}\mathrm{I}_h.$$

En substituant, au lieu des

$$r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g},$$

leurs séries (14), on obtient une équation identique en Δ de degré ν. En comparant les coefficients de Δ^ν, on obtient

$$\Delta^\nu = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \ldots + B_h i_h. \tag{18}$$

VI. — Les invariants i sont des fonctions entières des I.

Démonstration. — En arrangeant les invariants i selon leurs degrés, les invariants des degrés inférieurs précèdent et les invariants des degrés supérieurs succèdent.

En voulant représenter i en fonction entière des I, les invariants B_g sont déjà exprimés

$$B_g = F_g(I).$$

Si nous substituons ces valeurs dans (18), nous obtenons

$$i = F_1(I) I_1 + F_2(I) I_2 + \ldots + F_h(I) I_h = F(I).$$

Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Introduction.

Considérons une équation algébrique h_n de degré $n \geqq 4$

$$f(x) = x^n + \mathfrak{a}_1(t)\,x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_n(t) = 0,$$

où les coefficients $\mathfrak{a}_i(t)$ sont des fonctions quelconques de la variable t.

Prenons maintenant une équation de Riccati U

$$u' = \frac{du}{dt} = \mathfrak{b}_0(t) + u\,\mathfrak{b}_1(t) + u^2\,\mathfrak{b}_2(t),$$

et admettons que les n racines $x_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ de h_n soient des intégrales de U.

Cette condition entraînera, tant pour h_n que pour les irrationnelles x_i, des sujétions fort étroites dont l'étude est l'objet principal du présent Mémoire.

D'abord, le rapport anharmonique formé avec quatre racines sera constant. Je donnerai, pour rappeler cette propriété, à h_n le nom

d'équation *anharmonique*. Ce Travail sera donc consacré aux anharmoniques.

En second lieu, le *groupe* (au sens de Galois et de M. Jordan) de h_n sera très particularisé entre les n lettres x_i.

Pour définir ce groupe G, je considérerai comme *rationnelles par définition :*

1° Toutes les constantes;

2° Les coefficients $\mathfrak{a}_i(t)$ de h_n.

Je dirai donc qu'une expression quelconque est *rationnelle*, si elle est le quotient de deux polynomes en $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ à coefficients constants.

Sous le bénéfice de ces conventions, h_n sera supposée irréductible et G transitif.

Changeons x en

$$x^{(1)} = \frac{x\,\mathrm{A}(t) + \mathrm{B}(t)}{x\,\mathrm{C}(t) + \mathrm{D}(t)}, \qquad \mathrm{AD} - \mathrm{BC} \neq 0,$$

où A, B, C, D sont *rationnels*. h_n reste anharmonique et G ne change pas. *Je ne regarderai pas comme distinctes* deux h_n qui ne diffèrent que par le changement de x en $x^{(1)}$. Je profiterai des quatre coefficients A, B, C, D pour simplifier l'expression définitive de h_n.

La théorie des anharmoniques h_n est fondée sur celle des groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, constitués par des substitutions

$$\mathrm{L} = \left| z, \quad \frac{az+b}{cz+d} \right|, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Ce sont les groupes construits par MM. Jordan, Klein et Gordan. Rappelons quelques propriétés, d'ailleurs bien connues, de ces groupes S.

S appartient à un des cinq types suivants, d'ordre N :

I. Circulaire (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein), dérivé des N puissances d'une substitution unique

$$|z \quad \theta z|, \qquad \theta^{\mathrm{N}} = 1;$$

II. Pyramidal (*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein), dont les $N = 2m$ substitutions proviennent de

$$\Theta = |z \quad \theta z|, \qquad \theta^m = 1,$$
$$\varepsilon = |z \quad z^{-1}|,$$
$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1};$$

III. Tétraédrique, $N = 12$;
IV. Octaédrique, $N = 24$;
V. Icosaédrique, $N = 60$.

Pour le Tableau des trois derniers types, je renvoie au Mémoire de M. Jordan, inséré au tome 84 du *Journal de Crelle*.

Chacun de ces cinq types possède un *invariant absolu* (*zugehörige Function* de M. Klein)

$$\Psi(z) = \psi(z) : \varphi(z),$$

où ψ et φ sont des polynomes en z, à coefficients numériques; l'un au moins des deux a N pour degré, le degré de l'autre étant égal ou inférieur.

Voici les propriétés de Ψ : 1° c'est un invariant absolu vis-à-vis de toute substitution L de S, effectuée sur z; 2° tout autre invariant absolu rationnel s'exprime rationnellement en Ψ.

On trouvera au tome XII des *Mathematische Annalen*, p. 168, la liste, dressée par M. Klein, des cinq invariants absolus $\Psi(z)$.

Tout cela posé, la théorie des anharmoniques h_n repose sur deux propositions fondamentales :

Théorème I. — *Le groupe* G *de* h_n *est isomorphe sans hémiédrie à un groupe* S.

Théorème II. — *Toute* h_n *est de la forme*

$$F(x, T) = 0,$$

où le polynome F, *à deux arguments, est à coefficients numériques*

qui ne dépendent que de S. $T = T(t)$ *est rationnelle. La relation algébrique entre* x *et* T *est du genre zéro.*

Ainsi, il n'intervient dans h_n qu'*une seule* fonction $T(t)$ de t. Les $\mathfrak{A}$ sont rationnels en T, comme T l'est par rapport aux $\mathfrak{A}$.

h_n n'appartient qu'à un nombre fini, et même assez restreint, de types dont la construction effective et explicite peut être poursuivie jusqu'au bout.

Nommons

G_0 le sous-groupe formé par celles des substitutions de G qui laissent fixe la racine x_0;

S_0 le sous-groupe correspondant de S.

J'établis que G_0 *et* S_0 *sont constitués par les* p *puissances d'une substitution unique* ($\mathfrak{U}$ pour G_0, R pour S_0). Ni $\mathfrak{U}$ ni R ne sont puissances d'une autre substitution ayant un ordre plus élevé que p.

Voici comment on réalisera la construction effective de toutes les h_n :

On prendra un groupe S; on choisira dans ce groupe une substitution R d'ordre p. Il viendra $N = np$.

Posons ensuite l'équation W de degré N

$$\Psi(\Omega) = T \qquad \text{ou} \qquad \psi(\Omega) - T\varphi(\Omega) = 0,$$

où T est une fonction quelconque de t. Appelons Ω_j ($j = 0, 1, \ldots, N-1$) les N racines.

Si η_0 est une quantité dont la valeur ne change pas par l'effet de la substitution R, le polynome de degré $N = np$ en η

$$\begin{vmatrix} \psi(\eta) & \varphi(\eta) \\ \psi(\eta_0) & \varphi(\eta_0) \end{vmatrix}$$

sera la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte d'un polynome $H(\eta)$ de degré n, qui sera le *polynome réduit* de h_n. Soient η_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) les n racines de l'équation $H(\eta) = 0$.

Introduisons enfin l'expression suivante, où Ψ' et Π' désignent les dérivées de Ψ et de Π,

$$\mathcal{F}(X, Y) = \frac{1}{\Psi'(X)}\left[\frac{1}{X-Y} - \frac{\Pi'(X)}{n\Pi(X)}\right],$$

laquelle possède l'invariance absolue vis-à-vis de toute substitution $\mathcal{L}$ *de* S, *effectuée* simultanément *sur* X *et* Y.

En vertu de cette propriété *les* nX *expressions*

$$\mathcal{F}(\Omega_j, \eta_i) \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots, N-1 \\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

se réduisent à n distinctes, qui sont *précisément les* n racines x_i de h_n.

On posera donc

$$x_i = \mathcal{F}(\Omega, \eta_i),$$

Ω étant une quelconque des N racines de W.

L'irrationnelle x_i est mise sous une forme telle que la constance du rapport anharmonique de quatre x devient évidente.

Soit η_i une racine quelconque du polynome réduit; éliminons Ω entre les deux équations

$$x = \mathcal{F}(\Omega, \eta_i), \qquad \Psi(\Omega) = T. \tag{W}$$

Le résultant, indépendant du choix de η_i, sera du degré N en x, mais *sera aussi une puissance* $p^{ième}$ *exacte du polynome* $F(x, T)$, *du degré* n *en* x, envisagé au théorème II ci-dessus.

h_n se trouve ainsi complètement construite et notre problème a sa solution achevée.

Les N racines Ω_j de l'équation W et les n racines η_i de $\Pi = 0$ ont la propriété suivante : *elles sont toutes les transformées d'une quelconque d'entre elles par les substitutions* $\mathcal{L}$ *du groupe* S.

On appelle, dans la théorie des formes algébriques, *équivalents* deux polynomes $P(x)$ et $\mathcal{Q}(\eta_i)$, lorsqu'on passe de l'un à l'autre en

posant

$$\eta_i = \frac{x\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{x\mathfrak{C} + \mathfrak{D}} \qquad x = \frac{\eta_i\mathfrak{D} - \mathfrak{B}}{-\eta_i\mathfrak{C} + \mathfrak{A}}.$$

P et $\mathfrak{P}$ ont leurs invariants absolus correspondants égaux.

Je montre que *le* polynome réduit $\Pi(\eta_i)$ *est* équivalent *au polynome* $f(x)$, premier membre de h_n.

$\Pi(\eta_i)$ est à coefficients numériques et *tous les invariants absolus du polynome* $f(x)$ *sont des constantes numériques*, quoique les coefficients $A(t)$ de $f(x)$ dépendent de t.

Ce résultat était à prévoir, car tous les invariants absolus d'un polynome $f(x)$ sont des fonctions rationnelles des rapports anharmoniques construits avec quatre racines.

Le choix, dans un groupe S donné, de la substitution R n'est pas tout à fait *ad libitum*.

La substitution $\mathfrak{R}$ qui correspond, dans G, à R, peut déplacer toutes les racines de h_n autres que x_0. Les $n-1$ racines $x_1, \ldots, x_{n-1}$ se répartissent p à p entre les cycles de $\mathfrak{R}$ et p divise $n-1$. Je dirai qu'on a affaire à la première catégorie.

$\mathfrak{R}$ peut laisser fixe, outre x_0, une seconde racine x_1; les $n-2$ racines $x_2, \ldots, x_{n-1}$ se répartissent p à p entre les cycles de $\mathfrak{R}$ et p divise $n-2$. Je dirai que l'on a affaire à la deuxième catégorie.

D'ailleurs, *aucune substitution de* G *ne peut laisser fixes plus de deux racines.*

Voici le résultat de la discussion en ce qui concerne le choix de R ou du nombre p, $N = np$.

$$p = 1, \qquad R = 1.$$

S appartient à l'un quelconque des cinq types de M. Jordan. Toutes les racines de h_n s'expriment rationnellement en fonction d'une quelconque d'entre elles

$$p > 1.$$

Dans le cas de la deuxième catégorie, n est un nombre pair, $n = 2r$.

Les $2r$ racines se répartissent en r couples. Chaque racine d'un couple s'exprime rationnellement avec l'autre. h_n n'est pas primitive.

Toutes les racines de h_n s'expriment rationnellement avec deux quelconques d'entre elles, pourvu toutefois que ces dernières (dans le cas de la deuxième catégorie) n'appartiennent pas au même couple.

S n'est jamais du type circulaire.

Si S est du type pyramidal, $p = 2$. G dérive d'une substitution circulaire

$$\Theta = (0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \Theta^n = 1,$$

entre les n racines $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et d'une substitution binaire ε.

On a, pour n impair,

$$\varepsilon = (0)(1, n-1)(2, n-2)\ldots;$$

pour n pair $= 2r$,

$$\varepsilon = (0)(r)(1, n-1)(\ldots)\ldots.$$

n impair conduit à la première catégorie; n pair conduit à la deuxième.

Même quand n n'est pas premier, h_n participe aux propriétés des équations de Galois.

S tétraédrique ne donne que 2 anharmoniques, savoir ($N = 12 = n$) :

$n = 4$, $p = 3$ (l'équation h_4 est à groupe alterné et à discriminant carré; première catégorie).

$n = 6$, $p = 2$ (deuxième catégorie).

S octaédrique ne donne rien à la première catégorie et trois anharmoniques à la deuxième catégorie ($N = 24 = np$) :

$$\begin{array}{ll} n = 12 & p = 2 \\ n = 8 & p = 3 \\ n = 6 & p = 4 \end{array}$$

S icosaédrique ($N = 60 = np$) ne fournit rien à la première catégorie et trois équations à la deuxième catégorie :

$$\begin{array}{ll} n = 30 & p = 2 \\ n = 20 & p = 3 \\ n = 12 & p = 5 \end{array}$$

Quant à l'équation de Riccati U son intégrale générale est

$$u = \mathcal{F}(\Omega, C),$$

où C est la constante arbitraire et Ω la fonction fournie par l'équation W ou

$$\Psi(\Omega) = T(t).$$

Si l'on prend pour variable non plus t mais Ω, ce qui ne change pas le fond des choses, il est très facile de construire U elle-même.

H, Ψ' étant les expressions en Ω déjà envisagées, Ψ', Ψ'', H', ... étant les dérivées par rapport à Ω, U s'écrit

$$\Psi' \frac{du}{d\Omega} + u\Psi'' + \frac{d}{d\Omega}\frac{H'}{uH} + \left(u\Psi'' + \frac{H'}{uH}\right)^2 = 0.$$

Il fallait s'attendre à rencontrer tôt ou tard dans les présentes recherches les groupes S de M. Jordan, lesquels jouent un rôle essentiel dans l'intégration algébrique de l'équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre.

Voici pourquoi.

M. Painlevé (*Leçons de Stockholm*, p. 29 et suivantes) rattache à l'équation U de Riccati, l'équation V

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = vM(t).$$

Si u_1, u_2, u_3, ... sont des intégrales de U, si v_1, v_2, ... sont des intégrales de V et v'_1, v'_2, ... leurs dérivées, on a

$$\frac{v'_1 + Cv'_2}{v_1 + Cv_2}$$

pour l'intégrale générale de U et ensuite

$$v_1^2 = \frac{u_2 - u_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}.$$

Dans le cas qui nous occupe toutes les intégrales tant de U que de V

sont, à part le changement de variable indépendante t en $T(t)$, algébriques. L'intervention des groupes S de M. Jordan ne saurait manquer.

J'espère, dans une publication ultérieure, revenir sur la dépendance mutuelle des équations différentielles U et V.

Il paraît aussi intéressant et facile d'approfondir la théorie géométrique des courbes algébriques unicursales *anharmoniques*

$$F(x, T) = 0,$$

où, dans le polynome F envisagé au théorème II, ci-dessus, on prend x pour une ordonnée et T pour une abscisse.

Dans le présent Mémoire, je me contente, comme exemple d'application pour les procédés généraux, de construire toutes les anharmoniques du quatrième degré.

Les principaux résultats des présentes recherches ont fait l'objet de plusieurs Communications insérées aux *Comptes rendus :* une déjà ancienne (7 mai 1883), les autres plus récentes (13 février 1899; 5 et 12 février 1900).

CHAPITRE I.

Généralités sur l'équation algébrique anharmonique de degré n; les n constantes $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$.

---

1. Considérons une équation algébrique h_n de degré $n \geq 4$

$$f(x) = x^n + \mathcal{A}_1(t)\, x^{n-1} + \ldots + \mathcal{A}_n(t) = 0,$$

où les coefficients $\mathcal{A}$ sont des fonctions quelconques de la variable t.

Nous envisagerons comme *quantités rationnelles par définition :*

1° Toutes les constantes;

2° Les coefficients $\mathcal{A}$ de h_n.

Je ne considérerai pas comme distinctes deux h_n qui ne différeront que par le changement de x en

$$x^{(1)} = \frac{xa(t) + b(t)}{xc(t) + d(t)}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

$a, b, c, d =$ *rationnelles.*

Cela me permettra de supposer, sans restreindre la généralité, $\lambda_1 = 0$, c'est-à-dire nulle la somme des n racines.

Nommons, sous le bénéfice des hypothèses ci-dessus faites sur la rationnalité, G le groupe (au sens de Galois) de h_n. Il est évident que G est indépendant du changement de x en $x^{(1)}$. On admettra que G est transitif et h_n irréductible.

2. Prenons maintenant une équation U de Riccati

$$u' = \frac{du}{dt} = \mathfrak{B}_0(t) + u\mathfrak{B}_1(t) + u^2\mathfrak{B}_2(t).$$

Par hypothèse les n racines $x_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ de h_n seront des intégrales de U. Alors le rapport anharmonique de quatre racines sera constant et h_n prendra le nom d'équation algébrique *anharmonique*. Cette propriété est évidemment indépendante du changement de x en $x^{(1)}$ (n° **1**).

Je me propose d'étudier la nature de l'anharmonique h_n et des irrationnelles x_i.

3. Soit x_α une racine quelconque; posons

$$(n-1)c_\alpha = (n-1)c(x_\alpha) = \sum_i \frac{1}{x_i - x_\alpha},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad i \neq \alpha.$$

Il est facile de calculer la fonction $c(z)$ de l'indéterminée z. Soit

$$(1) \qquad f(z) = (z - x_\alpha) f_\alpha(z).$$

On aura

$$-(n-1)c(z)=\sum_i \frac{1}{z-x_i}, \qquad i \neq \alpha,$$

c'est-à-dire que la sommation est étendue aux $n-1$ racines de $f_\alpha(z)=0$. Si L est l'algorithme du logarithme népérien, il viendra

$$\sum_i \frac{1}{z-x_i}=\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{L}\prod_i{}^{\alpha}(z-x_i)=\frac{f'_\alpha(z)}{f_\alpha(z)}, \qquad f'_\alpha(z)=\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}.$$

Différentions deux fois par rapport à z la relation (1), on aura

$$f'(z)=(z-x_\alpha)f'_\alpha(z)+f_\alpha(z),$$
$$f''(z)=(z-x_\alpha)f''_\alpha(z)+2f'_\alpha(z).$$

D'où l'on tirera

$$f_\alpha(z) \quad \text{et} \quad f'_\alpha(z).$$

Pour $z=x_\alpha$

$$f_\alpha(x_\alpha)=f'(x_\alpha), \qquad f'_\alpha(z)=\tfrac{1}{2}f''(x_\alpha),$$
$$(n-1)c_\alpha=(n-1)c(x_\alpha)=-\frac{f''(x_\alpha)}{2f'(x_\alpha)}.$$

4. Introduisons les $n-1$ quantités y_i, $i \neq \alpha$, définies par les égalités

$$(1) \qquad x_i=x_\alpha+\frac{1}{c_\alpha-y_i}.$$

On doit du reste aussi introduire un $n^{\text{ième}}$ y, y_α, qui est ∞.

Tous les x_i étant inégaux, tous les y_i le seront aussi. Notamment un seul des y_i peut être zéro.

Si ce cas se présente, je dirai que h_n appartient à la *seconde catégorie*. Sinon on aura affaire à la première catégorie.

Je dis que *le rapport de deux y, aucun des deux n'étant ∞ ou 0, est une constante.*

Pour établir cette proposition fondamentale, j'écris que x_i, définie

par l'égalité (1) est une intégrale de U (n° 2), tout comme x_α. Après un calcul facile on a

$$y_i' + y_i(\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2) = P = c_\alpha' + c_\alpha(\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2) + \mathfrak{B}_2.$$

Sommons par rapport aux $(n-1)$ quantités y_i qui sont finies, il viendra

$$(n-1)P = \sum_i y_i' + (\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2)\sum_i y_i.$$

Mais, en vertu de (1),

$$y_i = c_\alpha - \frac{1}{x_i - x_\alpha}$$

et

$$\sum_i y_i = (n-1)c_\alpha - \sum_i \frac{1}{x_i - x_\alpha} = 0 \qquad (\text{n}^\circ\ 5)$$

Bref, $P = 0$ et

$$-\frac{y_i'}{y_i} = \mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2 = -\frac{y_j'}{y_j}, \qquad y_j : y_i = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

5. Considérons l'équation Y_α

$$\left.\begin{aligned} F^{(0)}(y; x_\alpha) = \prod_i (y - y_i) &= \prod_i \left(y - c_\alpha + \frac{1}{x_i - x_\alpha}\right) \\ &= y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x_\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i \neq \alpha),$$

l'opération $\prod_i$ étant étendue aux $(n-1)$ quantités y qui sont finies.

Y_α aura ses coefficients rationnels en x_α.

Pour la première catégorie, $a_{n-1} \neq 0$. Pour la seconde catégorie, $a_{n-1} = 0$; après départ du facteur y, Y_α se réduit au degré $n-2$.

J'écrirai pour Y_α :

$$\begin{aligned} F(y; x_\alpha) = y^M + y^{M-1}A_1(x_\alpha) + \ldots + y^j A_{M-j}(x_\alpha) \\ + \ldots + A_M(x_\alpha) = 0, \end{aligned}$$

$A_M \neq 0$; on aura alors

$M = n-1$ pour la première catégorie,

$M = n - 2$ pour la deuxième catégorie.

Quelques-uns des A peuvent être $\equiv 0$. Nommons m le plus grand commun diviseur des indices $M - j$ tels que, dans le terme $y^j A_{M-j}$, le coefficient $A_{M-j}(x_\alpha) \not\equiv 0$. Comme $A_M \neq 0$, m est évidemment un diviseur du degré M et $M = ms$. Y_α est une équation Z, de degré s en $z = y^m$.

6. Soit y_0 une racine de Y_α; toutes les M racines s'obtiendront par la formule

$$y_0 l_k, \qquad l_k = \text{const.}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M - 1; \qquad l_0 = 1.$$

Cela résulte immédiatement du n° **4**. Aucune des constantes l_k n'est nulle.

L'équation $\mathcal{E}$

$$\prod_k (y - y_0 l_k) = y^M + E_1 y_0 y^{M-1} + \ldots + E_j y_0^j y^{M-j} + \ldots + E_M y_0^M = 0,$$

où les E sont des constantes, a les mêmes racines que Y_α; identifions Y_α et $\mathcal{E}$; on aura les M relations

$$(1) \qquad A_j(x_\alpha) = E_j y_0^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, M$$

pour déterminer les $M + 1$ inconnues E_j et y_0.

Cherchons les solutions du système (1) ci-dessus. Plusieurs A_j peuvent être $\equiv 0$, les E_j correspondants sont alors nuls, c'est-à-dire déterminés.

Je ne retiens donc que les relations, au nombre de $M - M_1$,

$$(2) \qquad y_0^j E_j = A_j(x_\alpha),$$

où $A_j \not\equiv 0$. Soient $j, j_1, j_2, \ldots$, les exposants divers; on a déjà appelé m (n° **5**) leur plus grand commun diviseur.

Toute expression de la forme

$$j\mu + j_1\mu_1 + \ldots = \Sigma j\mu,$$

où les μ sont des entiers, positifs ou négatifs, est un multiple de m. Un théorème bien connu d'arithmétique nous apprend à construire au moins un système d'entiers μ tels que $\Sigma j\mu = m$. Écrivons

$$\Pi A^{\mu} \quad \text{pour} \quad A_j^{\mu} A_i^{\mu_1} \ldots,$$
$$e^{-m} = \Pi E^{\mu} \quad \text{pour} \quad E_j^{\mu} E_{j_1}^{\mu_1} \ldots.$$

Les égalités (2) donnent immédiatement

$$(3) \qquad \begin{cases} y_0^m = e^m \Pi A^{\mu}, \\ E_j = A_j y_0^j, \end{cases}$$

e restant indéterminé, ce qui devait être puisque l'on n'avait que M égalités (1) ci-dessus pour définir M + 1 inconnues.

Je dis qu'en faisant varier l'indéterminée e on obtient toutes les solutions possibles des équations (1), au moyen des formules (3) ci-dessus.

Soit en effet z_0 et E_j un autre système de solutions; on aura

$$A_j = y_0^j E_j = z_0^j E_j',$$
$$\left(\frac{z_0}{y_0}\right)^j = \frac{E_j}{E_j'}, \qquad z_0 : y_0 = \text{const}.$$

z_0 ne diffère de y_0 que par une autre valeur attribuée dans (3) à l'indéterminée e. Il en est de même pour E_j' et les E_j.

7. En résumé *y_0 est définie par une équation binome*

$$y_0^m - e^m \Omega(x_\alpha) = 0,$$

où e est une constante indéterminée et Ω une fonction rationnelle. $\Omega(x_\alpha)$ n'est pas autre chose que $\Pi A^{\mu}(x_\alpha)$ ci-dessus.

Je ferai entrer dans Ω le facteur constant e^m et j'écrirai simplement

$$(4) \qquad \varphi_m(y_0) = y_0^m - \Omega(x_\alpha) = 0.$$

Le quotient de deux racines sera constant.

8. *Adjoignons* (au sens de Galois) aux coefficients A de $f(x)$ (n° **1**) encore la racine x_α. $\Psi_m(y_0)$ se décomposera en facteurs rationnels

$$\Psi_m(y_0) = P_\sigma^\rho(y_0)P_{\sigma'}^{\rho'}(y_0)\ldots,$$

$\rho\sigma + \rho'\sigma' + \ldots = m$, tels que $P_\sigma = 0$, $P_{\sigma'} = 0, \ldots$ soient des équations irréductibles. Comme l'équation $\Psi_m = 0$ n'a pas de racines égales, il vient

$$\rho = \rho' = \ldots = 1.$$

Je dis que *tous les degrés* $\sigma, \sigma', \ldots$ *sont égaux*.

Soient η_1 et $k\eta_1$ deux racines de $\Psi_m = 0$, $k = \text{const.}$, avec

$$P_\sigma(\eta_1) = 0, \qquad P_\sigma(k\eta_1) = 0.$$

Les deux équations irréductibles en z

$$P_\sigma(z) = 0, \qquad P_{\sigma'}(kz) = 0,$$

ont une racine $z = \eta_1$ commune; donc elles coïncident et $\sigma' = \sigma$. Bref, $m = pr$ et l'équation binome (1) du n° **7** se décompose en r équations irréductibles de degré p, telles que

$$P_p(z) = 0.$$

Je dis que *l'équation* $P_p(z) = 0$ *est binome*.

Cela résulte immédiatement d'un théorème de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 81, p. 100, proposition III), puisque : 1° l'équation $P_p = 0$ est irréductible; 2° le quotient de deux racines de $P_p = 0$, qui sont aussi des racines de $\Psi_m = 0$, est constant.

La discussion précédente montre que les $m = pr$ racines y_0 de l'équation binome $\Psi_m = 0$ sont fournies par la formule

$$v_\alpha\lambda^k \qquad [\lambda^m = 1, \qquad k = 0, 1, \qquad \ldots, \qquad m-1],$$

où v_α est une des p déterminations de $V_\alpha^{\frac{1}{p}}$, V_α étant une fonction rationnelle de x_α.

L'équation Y_α (n° 5) de degré $M = ms$ est une équation Z de degré s en $z = y^m$. Nommons $g_h^m y_0^m$ $[h = 0, 1, \ldots, s-1]$ les s racines de Z.

Par conséquent : *Les* M *racines* y_i *de* Y_α *sont fournies par la formule*

$$(1) \qquad g_h \lambda^k v_\alpha \quad [h = 0, 1, \ldots, s-1;\ k = 0, 1, \ldots, m-1];$$

$\lambda^m = 1$, $M = ms$, $m = pr$, $v_\alpha^p = V_\alpha(x_\alpha)$, V_α *étant rationnelle. Les* g_h *sont des constantes.*

En outre, il y a un y_α infini (n° 4) et, dans le cas de la seconde catégorie, un y nul.

9. Si, dans la formule (1) du n° 4, on explicite les expressions de y_i, on aura, d'après ce qui vient d'être dit, α et β étant deux indices quelconques choisis dans la suite $0, 1, \ldots, n-1$,

$$x_\beta = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - q_{\alpha\beta} v_\alpha}.$$

Parmi les n *coefficients constants* $q_{\alpha\beta}$ *un, savoir* $q_{\alpha\alpha}$, *sera* ∞; *un, dans le cas de la seconde catégorie, sera zéro. Les* M *autres s'obtiendront par la formule* (1) *du n° 8, c'est-à-dire seront de la forme* $g_h \lambda^k$. D'ailleurs

$$M = n - 1 \text{ dans la première catégorie,}$$
$$M = n - 2 \text{ dans la deuxième.}$$

Tous les y étant différents, tous les $q_{\alpha\beta}$ le sont aussi. Pour cette raison, le rapport $g_{h'} : g_h$ ne peut être une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité pour $h' \neq h$, et les s racines $g_h^m y_0^m$ de l'équation Z du n° 8 sont distinctes.

Je nomme Q_α le système des n coefficients constants $Q_{\alpha\beta}$ afférents à l'indice α.

10. Quelle modification subira la construction du système Q si, au lieu de partir de la racine x_α, on avait choisi, au n° 5, une autre racine x_β ?

On aurait eu (n° 5) l'équation Y_β de degré $n-1$

$$F^{(0)}(y; x_\beta) = y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x_\beta) = 0.$$

Comme h_n est irréductible, $a_{n-1}(x_\beta)$ s'évanouit avec $a_{n-1}(x_\alpha)$ et seulement alors. Donc, *la catégorie ne change pas.*

Si $A_j(x_\alpha) = 0$, $A_j(x_\beta)$ est aussi $= 0$ et réciproquement : ainsi *le nombre m ne change pas.*

Admettons provisoirement que les nombres p et r puissent changer (¹). Les $n-1$ racines de l'équation Y_β seront fournies par la formule $c_\beta q_{\beta j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $j \neq \beta$, avec $q_{\beta\beta} = \infty$ et

$$c_\beta^m - \Omega(x_\beta) = 0$$

puisque (n° **7**)

$$c_\alpha^m - \Omega(x_\alpha) = 0; \qquad \Omega(x_\alpha) = \Pi A^p(x_\alpha).$$

On aura encore les égalités

$$x_j = x_\beta + \frac{1}{c_\beta - q_{\beta j} c_\beta}, \qquad c_\beta = c(x_\beta),$$

et un système Q_β de n termes $q_{\beta j}$ tous inégaux, dont un $q_{\beta\beta}$ est ∞, un autre est zéro, si l'on se trouve dans la seconde catégorie.

Je dis que *les systèmes* Q_α *et* Q_β *ne diffèrent que par l'ordre des n termes.*

11. $q_{\beta\beta}$ étant ∞ se retrouve dans Q_α puisque $q_{\alpha\alpha}$ est ∞. Soit un terme fini $q_{\beta j}$ de Q_β; je dis que $q_{\beta j}$ se retrouve dans Q_α.

Le groupe G de h_n, étant transitif, possède au moins une substitution $s = (\alpha\beta\ldots)$; soit i l'indice auquel s fait succéder j, de façon que

$$s = (\alpha\beta\ldots)(ij\ldots)(\ldots)\ldots.$$

Or, on a

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - q_{\alpha i} c_\alpha},$$

$$x_j = x_\beta + \frac{1}{c_\beta - q_{\beta j} c_\beta},$$

(¹) On verra au n° 32 que cela n'est pas.

$$q_{\alpha i} v_\alpha = c_\alpha + (x_\alpha - x_i)^{-1}, \qquad v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha),$$
$$q_{\beta j} v_\beta = c_\beta + (x_\beta - x_j)^{-1}, \qquad v_\beta^m = \Omega(x_\beta),$$
$$q_{\alpha i}^m = [c_\alpha + (x_\alpha - x_i)^{-1}]^m [\Omega(x_\alpha)]^{-1} = \psi(x_\alpha, x_i),$$
$$q_{\beta j}^m = \ldots = \psi(x_\beta, x_j), \qquad \psi = \text{rationnelle}.$$

La fonction rationnelle des deux racines $\psi(x_\alpha, x_i)$ est égale à la constante $q_{\alpha i}^m$ et ne change pas de valeur numérique par la substitution s; ainsi

$$q_{\alpha i}^m = \psi(x_\alpha, x_i) = \psi(x_\beta, x_j) = q_{\beta j}^m.$$

Si $q_{\beta j} = 0$, pour la deuxième catégorie, $q_{\alpha i} = 0$ aussi; $q_{\beta j}$ se retrouve dans Q_α. Si $q_{\beta j} \neq 0$, on a

$$q_{\beta j} = q_{\alpha i} \lambda^l, \qquad \lambda^m = 1.$$

Or $q_{\alpha i} = g_h \lambda^k$ (n° **9**) pour un choix convenable des nombres entiers h et k; ainsi $q_{\beta j} = g_h \lambda^{k+l}$ et se retrouve dans le système Q_α.

En résumé, tous les n termes distincts de Q_β se retrouvent parmi les n termes tous distincts de Q_α. Les deux systèmes coïncident, à l'ordre des termes près.

Je ne parlerai plus dorénavant de Q_α, Q_β, ..., mais du système unique Q (ou Q_0) dont les n termes q_i, $q_i = q_{0i}$ ont les valeurs suivantes : $q_0 = \infty$, $q_1 = 0$ dans la seconde catégorie, les M (n° **5**) autres q n'étant ni nuls, ni infinis.

Du reste, on peut numéroter de bien des façons différentes les n termes du système Q. Ainsi, au n° **17**, je démontrerai que les n quantités $q'_j = q_{j0}$ sont toutes distinctes. Au n° **27**, je raisonnerai non plus sur les q_i mais sur les q'_j.

CHAPITRE II.

GROUPE LINÉAIRE FRACTIONNAIRE S, D'ORDRE FINI; SON ISOMORPHE Γ ENTRE LES n LETTRES q.

12. Je ferai grand usage des substitutions linéaires fractionnaires $\mathfrak{L}$. J'emploierai plusieurs notations équivalentes

$$\mathfrak{L} = \left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right|, \qquad ad - bc \neq 0,$$

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{L} = | z \quad \mathfrak{L}[z] | = | z \quad z' |,$$

$z' = \mathfrak{L}[z] = \frac{az+b}{cz+d}$ étant alors ce que devient l'indéterminée z par l'effet de $\mathfrak{L}$.

L'inverse $\mathfrak{L}^{-1}$ de $\mathfrak{L}$ est

$$\mathfrak{L}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \qquad z = \mathfrak{L}^{-1}[z'].$$

$\mathfrak{L}$ est aussi définie par la relation entre z et z'

$$\mathfrak{F}(z, z') = czz' - za + z'd - b = 0.$$

Je dirai souvent simplement *une* $\mathfrak{L}$ au lieu de *une substitution linéaire fractionnaire* $\mathfrak{L}$.

Pour la multiplication des substitutions et la théorie des groupes, j'emploierai la terminologie et les notations, classiques en la matière, de M. Jordan.

13. Nommons σ_α la $\mathfrak{L}$ de déterminant $c_\alpha \neq 0$

$$\sigma_\alpha = \left| z \quad x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - z c_\alpha} \right|.$$

La formule du Chapitre I (n° **9**)

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - c_\alpha q_{\alpha i}}$$

peut s'écrire

$$x_i = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}].$$

De même

$$x_i = \sigma_\beta[q_{\beta i}],$$

et finalement

$$\sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = \sigma_\beta[q_{\beta i}], \qquad q_{\beta i} = \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha i}],$$

en posant $s_{\beta\alpha} = \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha$, d'où $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}^{-1}$. On a

$$q_{\beta i} = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha i}];$$

les $q_{\alpha i}$ et les $q_{\beta i}$ sont tous des termes appartenant au même système Q des n coefficients q_i (n° **11**). $s_{\beta\alpha}$ ne fait que permuter ensemble les q_i.

Par suite, $s_{\beta\alpha}$ a constants les rapports de trois de ses coefficients au quatrième.

Considérons maintenant la φ canonique d'ordre m

$$\Lambda = [z \quad \lambda z], \qquad \lambda^m = 1.$$

On a vu au Chapitre I que tous les q_i qui ne sont ni o, ni ∞, sont donnés par la formule $g_h\lambda^k$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$; $h = 0, 1, \ldots, s-1$; $ms = M$; $M = n-1$ pour la première catégorie; $M = n-2$ pour la deuxième catégorie). Donc Λ ne fait que permuter ensemble les M lettres q_i telles que $q_i \neq 0$ ou ∞. De plus, $\Lambda[0] = 0$, $\Lambda[\infty] = \infty$. Ainsi, Λ *partage avec les* $s_{\alpha\beta}$ *la propriété de permuter ensemble les* n *termes* q_i *du système* Q.

14. Nommons S le groupe dérivé des $s_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1$) et de Λ. S est évidemment isomorphe au groupe Γ entre n lettres, constitué par les déplacements des q_i.

L'isomorphisme est holoédrique, car une φ de S, qui laisse fixes les n ($n > 3$) lettres q_i, se réduit à l'unité.

S est d'ordre fini et appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan, énumérés dans l'Introduction.

Nommons N l'ordre commun de S et de Γ.

15. *Γ est transitif entre les n lettres q_i.*

Prenons deux combinaisons quelconques $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ des n indices 0 à $n-1$. Il suffit qu'il existe au moins une $\mathfrak{L}$ de S, par exemple s, telle que

$$q_{\alpha'\beta'} = s|q_{\alpha\beta}|,$$

pour que la transitivité soit assurée.

Or on a (n° **13**)

$$q_{\beta i} = s_{\beta\alpha}|q_{\alpha i}|, \qquad q_{\beta\alpha} = s_{\beta\alpha}|q_{\alpha\alpha}| = s_{\beta\alpha}|\varkappa|,$$

et, de même,

$$q_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}|\varkappa|, \qquad q_{\alpha'\beta'} = s_{\alpha'\beta}|\varkappa|,$$

d'où

$$q_{\alpha'\beta'} = s_{\alpha'\beta'}s_{\beta\alpha}|q_{\alpha\beta}|,$$

car

$$s_{\beta\alpha} = s_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Il suffit de faire

$$s = s_{\alpha'\beta'}s_{\beta\alpha}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

S contiendra $N = n\mathfrak{N}$ substitutions, $\mathfrak{N}$ étant l'ordre du groupe S_0 formé par les $\mathfrak{L}$ de S qui laissent fixe $q_0 = \varkappa$.

16. Étudions S_0 et nommons s une $\mathfrak{L}$ de S_0

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a, par hypothèse,

$$s|\varkappa| = \frac{a}{c} = \varkappa, \qquad \text{d'où} \qquad c = 0.$$

J'écrirai, pour simplifier les notations,

$$s = |z \quad az + b| = (a, b) \quad \text{ou} \quad |a, b|.$$

Un calcul simple montre que

$$(a, b)^l = \left[a^l, \frac{b(a^l - 1)}{a - 1}\right] \qquad \text{pour} \qquad a \neq 1,$$

$$(1, b)^l = (1, lb).$$

Comme $s = (a, b)$ *est d'ordre fini*, $b = 0$, dès que $a = 1$; alors $s = 1$.

Soient $s = (a, b)$, $s' = (a', b')$, il viendra

$$s's = (aa', a'b + b'), \qquad ss' = (aa', ab' + b),$$

$$ss'(s's)^{-1} = (1, \ldots) = 1,$$

en vertu de ce qui précède, et *toutes les* $\mathfrak{L}$ *de* S_0 *sont échangeables entre elles.*

De la relation $ss' = s's$ on tire

$$a'b + b = ab' + b, \qquad (a' - 1)b = (a - 1)b',$$

$$\frac{b}{a - 1} = \frac{b'}{a' - 1} = e.$$

Les $\mathfrak{L}$ de S_0 ont la forme

$$[a, e(a - 1)], \quad [a', e(a' - 1)], \quad \ldots,$$

e étant le même pour toutes les substitutions.

$a, a', \ldots$ sont des racines de l'unité. Si une des $\mathfrak{L}$ est canonique, $e = 0$ et toutes les $\mathfrak{N}$ substitutions $\mathfrak{L}$ de S_0 sont canoniques; donc, en vertu de théories bien connues, S_0, *d'ordre* $\mathfrak{N}$, *est constitué par les* $\mathfrak{N}$ *puissances d'une seule substitution*

$$R = [\rho, e(\rho - 1)] = [\rho^{\mathfrak{N}}, \rho\sigma + e(\rho - 1)], \qquad \rho^{\mathfrak{N}} = 1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si $m > 1$, S_0 contient les puissances de la $\mathfrak{L}$ canonique A (n° **15**), R est alors aussi canonique et $e = 0$. Bref, *on ne peut avoir* $e \neq 0$ *que si* $m = 1$; $\mathfrak{N}$ est évidemment un multiple de m.

17. Nous sommes maintenant à même de donner une idée plus précise de la nature de S et de Γ.

Prenons, gardant les notations du n° **15**, dans S les n substitutions σ, $s_\alpha = s_{0\alpha} = \sigma_0^{-1}\sigma_\alpha$; $s_0 = 1$. Elles sont toutes distinctes, car si $s_\alpha = s_\beta$, on aurait

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta, \qquad \sigma_\alpha|x| = x_\alpha = \sigma_\beta|x| = x_\beta,$$

résultat absurde. La relation $\sigma_\alpha|q_{\alpha i}| = \sigma_\beta|q_{\beta i}|$ du n° **15** devient

$$s_\alpha|q_{\alpha i}| = s_\beta|q_{\beta i}|.$$

d'où, à volonté : si $i = \beta = 0$,

$$(1) \qquad s_\alpha|q_{\alpha 0}| = q_{00}, \qquad q_{\alpha 0} = s_\alpha^{-1}|q_{00}| = s_\alpha^{-1}|x|;$$

si $\alpha = 0$, $\beta = i$,

$$(2) \qquad q_{0\beta} = s_\beta|x|, \qquad q_{0\alpha} = s_\alpha|q_{00}| = s_\alpha|x|;$$

si $i = \beta$,

$$(3) \qquad s_\alpha|q_{\alpha\beta}| = s_\beta|x|, \qquad q_{\alpha\beta} = s_\alpha^{-1}s_\beta|x|.$$

Tous les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont ainsi connus dès que S est connu.

Nommons $\mathfrak{S}_\alpha$ la substitution de Γ qui correspond à s_α, on aura, puisque $q_{0\alpha} = q_\alpha = s_\alpha|q_{00}| = s_\alpha[q_0]$,

$$\mathfrak{S}_\alpha = (q_0 q_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Soit $\mathfrak{T}$ une substitution *quelconque* de Γ, qui fasse succéder l'indice α à l'indice 0,

$$\mathfrak{T} = (q_0 q_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Il viendra

$$\mathfrak{T}\mathfrak{S}_\alpha^{-1} = (q_0)(\ldots)\ldots = \mathfrak{R}',$$

$\mathfrak{R}$ étant la substitution de Γ qui correspond à R (n° **16**). Toutes les $N = n\mathfrak{N}$ substitutions de Γ sont ainsi fournies par la formule

$$\mathfrak{R}^l\mathfrak{S}_\alpha \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Par suite, *les* $n\mathfrak{N} = N$ *substitutions* $\mathfrak{L}$ *de* S *sont fournies par la formule*

$$R' s_\alpha.$$

Il résulte notamment de là que *les* n *quantités* $q_{\alpha 0}$ *sont toutes distinctes*. En effet, si $q_{\alpha 0} = q_{\beta 0}$, la formule (1) ci-dessus donnerait

$$q_{\alpha 0} = s_\alpha^{-1}[q_{00}] = s_\alpha^{-1}[\infty] = q_{\beta 0} = s_\beta^{-1}[\infty];$$

alors

$$s_\beta s_\alpha^{-1}[\infty] = \infty, \qquad s_\beta s_\alpha^{-1} = R', \qquad s_\beta = R' s_\alpha,$$

et les $n\mathfrak{N}$ expressions $R' s_\alpha$ ne seraient plus distinctes.

Posons (n° **11**, *in fine*) $q_{i0} = q'_i$, $q_0 = q'_0 = \infty$ (ce qui équivaut à un numérotage différent des q); en vertu de (1), on aura, pour substitution correspondante à s_α^{-1} dans le groupe Γ *construit sur les* q,

$$(q'_0 q'_2 \ldots)(\ldots),$$

résultat utile au n° **25**.

18. La formule du n° **15**

$$(1) \qquad x_i = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] \qquad \text{ou} \qquad x_i = \sigma_0[q_i]$$

conduit à une conséquence nouvelle.

Envisageons le polynome $\bar{\sigma}(q)$ dont les q_i sont racines; $\bar{\sigma}(q)$ sera du degré $n-1$, puisque la racine q_0 est infinie. Dans la deuxième catégorie, il y aura aussi une racine nulle.

Les formules (1) montrent que le polynome $f(x)$ (n° **1**), dont les x_i sont racines, est *équivalent* (au point de vue de la théorie des formes) au polynome $\bar{\sigma}(q)$ à coefficients constants.

Tous les invariants absolus de $f(x)$ sont des constantes. Cela était à prévoir, car ces invariants sont des fonctions rationnelles par rapport aux rapports anharmoniques des racines x_i.

Je dirai que $\bar{\sigma}(q)$ est le *polynome réduit* du polynome $f(x)$.

Toute $\mathfrak{L}$ de S, permutant ensemble les racines q_i du polynome réduit, ne peut, après départ des dénominateurs, que multiplier ce polynome réduit par un coefficient numérique : $\bar{\sigma}(q)$ *est un inva-*

viant par rapport au groupe S, *dont les* $\mathfrak{L}$ *sont effectuées sur* q, toujours après départ des dénominateurs.

19. On a vu (n° **16**) que R,

$$R = \left| z \quad \rho z + e(\rho - 1) \right|, \qquad \rho^{\mathfrak{N}} = 1,$$

dont les $\mathfrak{N}$ puissances constituent S_0, est forcément canonique, $e = 0$, dès que $m > 1$, mais que, si $m = 1$, on a éventuellement

$$e \neq 0.$$

R devient canonique dès que l'on transforme S par la substitution

$$E^{-1} = \left| z \quad z + e \right|,$$

$E|x| = E|q_0| = x = q_0$; $E = 1$ dès que $e = 0$. Considérer ESE^{-1} au lieu de S, c'est opérer non plus sur z et q_i, mais sur $z + e$ et $q_i + e$.

Voici, relativement aux groupes S et S_0 *ainsi transformés par* E^{-1}, quelques lemmes utiles pour la suite.

I. *Aucune* s_α *n'est une puissance de* R, car on aurait $s_\alpha|x| = x$, $s_\alpha|q_0| = q_0$, ce qui est absurde, car (n° **17**)

$$s_\alpha|q_0| = q_\alpha \qquad \text{et} \qquad q_\alpha \neq q_0.$$

II. *Aucune* $\mathfrak{L}$ *de* S *autre que les puissances de* R *n'est canonique*, car on aurait encore $\mathfrak{L}|x| = x$, $\mathfrak{L} = R^l$.

III. S_0 *ne contient aucun sous-groupe* $\mathfrak{T}$ *permutable aux* $\mathfrak{L}$ *de* S.

Les $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{T}$ sont canoniques, puisque ce sont des puissances de R; désignons par s une $\mathfrak{L}$ quelconque de S non contenue dans S_0: si $s^{-1}\mathfrak{T}s = \mathfrak{T}$, on a (Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 96, n° **7**) ou bien

$$s_\alpha \text{ canonique},$$

ce qui est absurde (lemme II), ou bien

$$s = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|, \qquad s^2 = 1;$$

Les $N = n\mathfrak{N}$ substitutions de S, qui devient pyramidal (*voir* Introduction), se réduisent aux $2\mathfrak{N}$ substitutions dérivées de s et de R et données par la formule

$$s^g R^l \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;\ g = 0 \text{ et } 1).$$

Cela est absurde, car on aurait $n = 2$.

On verra, du reste, au n° **32** que R est toujours canonique et e toujours nul. L'hypothèse $e \neq 0$ est toute provisoire.

CHAPITRE III.

IDENTITÉ DE Γ AVEC LE GROUPE G DE L'ANHARMONIQUE.

---

20. Reprenons la relation

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - c_\alpha q_{\alpha i}} = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{15}),$$

où

$$\sigma_\alpha = \left| z \quad x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - c_\alpha z} \right|,$$

et le groupe S des $n\mathfrak{N}$ substitutions (n° **17**)

$$R^l s_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1;\ l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1),$$
$$R = \left| z \quad \rho z + e(\rho - 1) \right|.$$

Changeons z et q_i en $z + e$ et $q_i + e$, ce qui a pour effet (n° **19**) de transformer S par la substitution

$$E^{-1} = \left| z \quad z + e \right|$$

et de rendre R canonique.

Nommons

$$d_\alpha = \frac{c_\alpha}{c_\alpha} + e = E^{-1}\left[\frac{c_\alpha}{c_\alpha}\right]$$

ce que devient le rapport $\frac{c_\alpha}{c_\alpha}$ par l'effet de E^{-1}.

Il viendra

$$\sigma_\alpha = \left[z - x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha(d_\alpha - z)}\right].$$

Dès que $m > 1$, E se réduit à l'unité (n° **16**, *in fine*)

$$e = 0,$$

et d_α se réduit au quotient

$$\frac{c_\alpha}{c_\alpha},$$

dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est rationnelle puisque $c_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$ (Chapitre I).

21. Je vais étudier les propriétés des d_α qui sont le fondement de toute la théorie.

On a d'abord, avec les notations du n° **17**,

$$x = \sigma_\alpha[d_\alpha] = \sigma_0[d_0], \qquad d_0 = \sigma_0^{-1}\sigma_\alpha[d_\alpha] = s_\alpha[d_\alpha].$$

d'où $d_\alpha = s_\alpha^{-1}[d_0]$; de même $s_\alpha[d_\alpha] = s_\beta[d_\beta]$.

Les $n\mathfrak{N}$ quantités u_j ($j = 0, 1, \ldots, N - 1$; $N = n\mathfrak{N}$) fournies par la formule

$$\rho^j d_\alpha = R^j s_\alpha^{-1}[d_0]$$

sont des transformées par des ρ de S de l'expression $u_0 = d_0$. Je vais montrer que les N quantités u_j sont toutes distinctes. Alors elles seront *toutes les transformées* de u_0 par les ρ de S. Ces dernières ne feront que permuter ensemble les u_j.

22. 1. *Aucun d_α n'est x*, car on aurait

$$c_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha};$$

h_n aurait des racines égales.

II. *Si un d_α = const., tous les d_α sont constants.*

Posons $d_\alpha = \frac{c_\alpha}{v_\alpha} + e = \mathrm{K}$; il viendra

$$\frac{c_\alpha}{v_\alpha} = \mathrm{K} - e, \qquad c_\alpha^m = (\mathrm{K} - e)^m v_\alpha^m.$$

Or (Chap. I) $v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$, Ω étant rationnelle

$$(1) \qquad c_\alpha^m = [c(x_\alpha)]^m = (\mathrm{K} - e)^m \Omega(x_\alpha).$$

Comme h_n est irréductible, la relation (1) subsiste pour toutes les racines x_α et *tous* les d_α sont des constantes.

III. *Il est absurde de supposer tous les d_α constants.*

Des formules telles que

$$(1) \qquad x_\beta = x_\alpha + \frac{1}{v_\alpha(d_\alpha - q_{\alpha\beta})}$$

on tire

$$(x_\beta - x_\alpha)^{-1} = v_\alpha(d_\alpha - q_{\alpha\beta}) = -v_\beta(d_\beta - q_{\beta\alpha}).$$

$d_\alpha - q_{\alpha\beta} \neq 0$ sans quoi, en vertu de (1), $x_\beta = \infty$; de même $d_\beta - q_{\beta\alpha} \neq 0$. Alors

$$\frac{v_\alpha}{d_\beta - q_{\beta\alpha}} = \frac{-v_\beta}{d_\alpha - q_{\alpha\beta}}.$$

Si tous les d sont constants, les rapports des v sont constants et l'on peut poser

$$(2) \qquad x_\beta - x_\alpha = \mathrm{K}_{\beta\alpha}\omega, \qquad \mathrm{K}_{\beta\alpha} = \text{const.}$$

Effectuons la sommation $\sum_\beta$, $\beta \neq \alpha$, des égalités (2), en remarquant que la somme des racines de h_n est nulle (n° I) ; on aura

$$-nx_\alpha = \omega \sum_\beta \mathrm{K}_{\beta\alpha}.$$

Le rapport de deux racines x_α serait constant. Raisonnant sur h_n

comme on a raisonné sur Y_α au Chapitre I, on verra que l'irrationnelle x_i est de la forme $x_i = K_i T^{\frac{1}{m}}$, T = fonction rationnelle des coefficients $\mathfrak{a}$ de $f(x)$ (n° **1**). Les x_i ne seraient plus intégrales d'une équation de Riccati mais d'une équation

$$mT\frac{du}{dt} = uT', \qquad T' = \frac{dT}{dt}.$$

IV. *Aucun rapport $d_\beta : d_\alpha$ n'est constant pour $\beta \neq \alpha$.*

Posons $d_\beta = K d_\alpha$, K = const. On a $d_\beta = s[d_\alpha]$ (n° **21**), où

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = s_\beta^{-1} s_\alpha$$

est une $\mathfrak{L}$ de S.

Il viendrait

$$d_\beta = K d_\alpha = \frac{a d_\alpha + b}{c d_\alpha + d},$$

$$(1) \qquad K c d_\alpha^2 + d_\alpha(K d - a) - b = 0.$$

L'équation (1) en d_α est une identité, sinon d_α = const., ce qui est absurde (lemme III); donc

$$b = c = K d - a = 0,$$

s est canonique.

De là successivement, toujours avec les notations du n° **17**,

$$s[\varkappa] = s_\beta^{-1} s_\alpha[\varkappa] = \varkappa,$$
$$s_\alpha[\varkappa] = s_\beta[\varkappa],$$
$$\sigma_0 s_\alpha[\varkappa] = \sigma_\alpha[\varkappa] = x_\alpha = \sigma_0 s_\beta[\varkappa] = \sigma_\beta[\varkappa] = x_\beta,$$

ce qui est absurde.

Les quatre lemmes précédents entraînent la conséquence annoncée :

V. *Les $N = n\mathfrak{N}$ quantités $u_j (j = 0, 1, \ldots, N-1)$ du n° **21** données par la formule*

$$\rho^l d_\alpha \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sont toutes distinctes.

Si l'on avait, en effet,

$$\rho^t d_\beta = \rho^t d_\alpha, \qquad \beta \neq \alpha,$$

on aurait

$$d_\beta : d_\alpha = \text{const.}$$

ce qui est absurde (lemme IV).

Les ρ de S permutent entre elles les N lettres u_l; les déplacements des u_l forment un groupe Γ entre N lettres, évidemment : 1° isomorphe à S et à Γ; 2° transitif.

Il n'y a pas hémiédrie, car S ne possède aucune ρ laissant tous les u_l fixes. Γ a son ordre N égal à son degré. Chaque substitution de Γ déplace chacune des N lettres u.

23. Considérons l'équation D de degré N $[l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;$ $\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1]$:

$$D(u) = \prod_{j=0}^{j=N-1} (u - u_j) = \prod_{l\alpha} (u - \rho^l d_\alpha) = \prod_\alpha (u^{\mathfrak{N}} - d_\alpha^{\mathfrak{N}}) = 0.$$

Je dis que $d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \left(\frac{c_\alpha}{c_\alpha} + e\right)^{\mathfrak{N}}$ (n° **20**) est rationnel en x_α.

En effet, $c_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$ (Chap. I), Ω étant rationnelle, $e = 0$ dès que $m > 1$ (n° **16**, *in fine*); enfin $\mathfrak{N}$ est un multiple de m (n° **16**).

Par conséquent :

lorsque $m > 1$, $e = 0$, $d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \left[\frac{c(x_\alpha)}{c_\alpha}\right]^{\mathfrak{N}} = \frac{[c(x_\alpha)]^{\mathfrak{N}}}{[\Omega(x_\alpha)]^{\frac{\mathfrak{N}}{m}}} =$ rationnelle;

lorsque $m = 1$, c_α est rationnelle et $d_\alpha^{\mathfrak{N}}$ aussi.

On a donc $D(u) = W(u^{\mathfrak{N}})$, les coefficients du polynome W en $u^{\mathfrak{N}}$ étant symétriques par rapport aux x_α, c'est-à-dire rationnels par rapport aux coefficients A_i de $f(x)$ (n° **1**). Les coefficients des polynomes D ou W sont donc *rationnels* au sens du n° **1**.

24. *Le groupe (au sens de Galois) de l'équation* D, *de degré* N *et à coefficients rationnels, est précisément le groupe* Γ *du n°* **22** (*in fine*).

On supposera D irréductible; on verra au Chapitre IV, n° **55**, ce qu'il en est effectivement.

Soient s_j ($j = 0, 1, \ldots, N - 1$) les N substitutions $\mathfrak{L}$ de S, on aura $u_j = s_j[u_0]$. L'expression $\psi(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, rationnelle en u_j et à coefficients *rationnels* au sens du n° **1**, est identique à une expression analogue $\chi(u_0)$ en u_0 seul. Il est indifférent d'effectuer dans ψ :

Soit *sur les* u_j une substitution s de S;

Soit *entre les* u_j une permutation marquée par la substitution σ de Γ' correspondante à s.

Prenons l'identité

$$\psi(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = \chi(u_0).$$

Si ψ est invariable par les substitutions σ de Γ', on a, en vertu de la transitivité de Γ',

$$\chi(u_0) + \chi(u_1) + \ldots + \chi(u_{N-1}) = \frac{\chi(u_0) + \chi(u_1) + \ldots}{N}.$$

ψ est symétrique par rapport aux racines de D, c'est-à-dire rationnelle.

Si $\psi = \chi(u_0)$ est rationnelle, on a, puisque D est irréductible par hypothèse,

$$\psi = \chi(u_0) = \chi(u_1) = \ldots;$$

ψ ne change pas de valeur par les substitutions σ de Γ'.

Ainsi Γ' est le *groupe* de D. C. Q. F. D.

Posons

$$w_0 = u_0^{\mathfrak{N}} = d_0^{\mathfrak{N}}.$$

w_0 est invariable par les $\mathfrak{N}$ puissances de la canonique $R = [z, \rho z]$ ($\rho^{\mathfrak{N}} = 1$) qui constituent le groupe S_0.

Les N transformées de w_0 par les $N = n\mathfrak{N}$ substitutions de S se réduisent à n seulement, savoir $[\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1]$

$$w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}}.$$

Toutes les w_α sont distinctes, car, si $w_\alpha = w_\beta$, on aurait

$$d_\alpha : d_\beta = \text{const.} \quad (\text{n° } \mathbf{22}, \text{ lemme IV}).$$

Chaque substitution de S produit, entre les n lettres w_α, un certain déplacement dont l'ensemble constitue un groupe Γ'' entre n lettres évidemment isomorphe à S, à Γ et à Γ'.

Je dis que *l'hémiédrie n'existe pas*. Il existerait, en effet, alors dans S un groupe $\bar{\mathfrak{s}}$ laissant fixes toutes les n quantités $w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{T}}$; R laisse w_0 fixe et $\bar{\mathfrak{s}}$ est contenu dans S_0. $\bar{\mathfrak{s}}$ est permutable aux ϱ de S, ce qui est absurde (lemme III du n° **19**); l'holoédrie est forcée.

25. Je dis que *les deux groupes* Γ *et* Γ'', *de même degré* n, *isomorphes sans hémiédrie, sont identiques*, c'est-à-dire diffèrent uniquement par le nom des lettres déplacées.

La proposition devient évidente si l'on suppose Γ construit sur les n lettres q' du n° **17** (c'est-à-dire sur les q différemment numérotés).

En effet, prenons les substitutions correspondantes R de S, $\mathfrak{R} = (q'_0)(\ldots)\ldots$ de Γ, $\mathfrak{R}'' = (w_0)(\ldots)\ldots$ de Γ'', puis les substitutions correspondantes s_α^{-1}, $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}''_\alpha$ de S, Γ et Γ''. On a

$$q'_\alpha = s_\alpha^{-1}[q'_0] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{17},\ \textit{in fine}),$$

$$d_\alpha = s_\alpha^{-1}[d_0] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{21}) \qquad \text{et} \qquad w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{T}};$$

donc

$$\mathfrak{S}_\alpha = (q'_0 q'_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots, \qquad \mathfrak{S}''_\alpha = (w_0 w_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Prenons maintenant dans Γ et Γ'' deux correspondantes quelconques $\mathfrak{T} = (q'_\alpha q'_\beta \ldots)\ldots$ et $\mathfrak{T}''$. Je vais montrer, et cela suffit, que $\mathfrak{T}'' = (w_\alpha w_\beta \ldots)\ldots$. Or

$$\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{T} \mathfrak{S}_\beta^{-1} = (q'_0)(\ldots)\ldots = \mathfrak{R}'$$

et

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S}_\alpha^{-1} \mathfrak{R}' \mathfrak{S}_\beta.$$

D'où, par isomorphisme holoédrique,

$$\mathfrak{T}'' = \mathfrak{S}''^{-1}_\alpha \mathfrak{R}'' \mathfrak{S}''_\beta = (w_\alpha w_\beta \ldots)(\ldots)\ldots.$$

C. Q. F. D.

Ainsi Γ'' permute les w_α, de la même façon que Γ permute les $q_\alpha = q_{\gamma 0}$ du n° **17**.

Je ne parlerai dorénavant plus de Γ'', mais seulement de Γ.

26. Revenons maintenant à l'équation D du n° **25**.

Le premier membre $D(u)$ de D est un polynome de degré $N = n\mathfrak{N}$ en u et de degré n, $W(w)$, en $w = u^{\mathfrak{N}}$.

Les n racines de l'équation W, $W(w) = 0$, sont évidemment les $w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}}$.

W est irréductible dès que D l'est. En effet, si

$$W(w) = W(u^{\mathfrak{N}}) = D(u)$$

admettait le polynome rationnel $\Phi(w)$ pour diviseur, $D(u)$ admettrait le diviseur rationnel $\Phi(u^{\mathfrak{N}})$.

Je dis que *le groupe* (*au sens de Galois*) *de* W *est précisément* Γ (c'est-à-dire Γ'') (n° **25**).

Si ψ et χ ont même signification qu'au n° **24**, on aura encore

$$\psi(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = \chi(u_0),$$

et le raisonnement s'achève comme au n° **24**.

27. On a vu, au n° **25**, que $w_\alpha = \left[\frac{c(x_\alpha)}{v_\alpha} + e\right]^{\mathfrak{N}}$ est toujours une fonction rationnelle et à coefficients rationnels $\xi(x_\alpha)$ de x_α. Je dis que *réciproquement* $x_\alpha = X(w_\alpha)$, X étant de même nature que ξ.

Considérons, en effet, les deux équations en x, h_n ou $f(x) = 0$ et $w = \xi(x)$. La résultante, de degré n en w, est évidemment W. Je dis qu'il n'y a, sous le bénéfice de W, qu'une seule racine x commune à $f(x) = 0$ et $\xi(x) - w = 0$. S'il y en avait deux, x_α et x_β, on aurait, pour une même racine w_α de la résultante W,

$$w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \xi(x_\alpha) = \xi(x_\beta) = w_\beta = d_\beta^{\mathfrak{N}};$$

$d_\beta : d_\alpha =$ const., ce qui est absurde (n° **22**, lemme IV). L'unique racine commune s'obtient par des procédés rationnels, et l'on a

$$x = X(w), \qquad x_\alpha = X(w_\alpha) = X_\alpha.$$

28. *Le groupe* G *de l'équation* h_n *est précisément* Γ.

Soit $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ une expression rationnelle par rapport aux x et à coefficients rationnels. On aura l'identité

$$\psi(x_0, x_1, \ldots) = \psi(X_0, X_1, \ldots) = \chi(w_0, w_1, \ldots).$$

Si ψ est rationnellement exprimable, il en est de même pour χ et réciproquement. Γ est le groupe de W; pour que χ soit rationnellement exprimable, il faut et il suffit que χ soit invariable par les substitutions σ de Γ. Opérer une σ dans χ entre les w, c'est opérer aussi σ dans ψ entre les x. Donc Γ est aussi le groupe de h_n.

Il vient ainsi le théorème fondamental de toute la présente théorie : *Toute anharmonique* h_n *a son groupe* G *isomorphe sans hémiédrie à un groupe* S *de substitutions linéaires fractionnaires.*

S est d'ordre fini et appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION D; POLYNOME RÉDUIT.

---

29. Je suis maintenant à même de préciser la nature du groupe G et du sous-groupe G_0, ce dernier composé des substitutions $(x_0)(\ldots)\ldots$.

G_0, étant correspondant à S_0, provient des $\mathfrak{N}$ puissances de la substitution $\mathfrak{R}$ correspondante à R.

Reprenons la formule du Chapitre I :

$$(1) \qquad x_i = x_0 + \frac{1}{c_0 - v_0 q_i},$$

où $c_0 = c(x_0)$, $q_i = q_{0i}$ (n° **11**), v_0 est racine de l'équation binome $v_0^m - \Omega(x_0) = 0$ et de l'équation binome irréductible P_p du n° **8**,

$$v_0^p - V_0(x_0) = 0, \qquad m = pr;$$

enfin $\mathfrak{N} = m\,m'$ (n° **16**, *in fine*), m' = entier.

V_0 est rationnelle. Je vais montrer que $\mathfrak{N} = p$; par suite, les égalités $\mathfrak{N} = m'm$, $m = pr$ donnent

$$rm' = 1, \qquad r = m' = 1, \qquad \mathfrak{N} = m = p.$$

50. Adjoignons (au sens de Galois) x_0 à h_n; G se réduit à G_0 et l'équation P_p à coefficients rationnels et irréductible possède un groupe transitif γ.

Si λ est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, $\mu = \lambda^r$ est racine primitive $p^{\text{ième}}$. Les p racines de P_p sont

$$v_{00} = v_0, \quad v_{01} = \mu v_0, \quad \ldots \quad v_{0i} = \mu^i v_0, \quad \ldots \quad v_{0,p-1} = \mu^{p-1} v_0.$$

Je dis que γ *est constitué par les p puissances de la substitution circulaire*

$$\pi = (v_{00} v_{01} \ldots v_{0,p-1}).$$

Soit en effet

$$\pi' = (v_{0\alpha} v_{0\alpha} \ldots)(v_{0\beta} v_{0\beta} \ldots)(\ldots)\ldots$$

une substitution quelconque de γ. π' ne change pas la valeur $\mu^{\beta-\alpha}$ du quotient $v_{0\beta} : v_{0\alpha}$. Donc

$$\mu^{\beta-\alpha} = v_{0\beta} : v_{0\alpha} = v_{0\beta'} : v_{0\alpha'} = \mu^{\beta'-\alpha'},$$

$$\beta' - \alpha' \equiv \beta - \alpha \qquad (\text{mod } p),$$

$$\beta' - \beta \equiv \alpha' - \alpha \equiv k \qquad (\text{mod } p),$$

$$\beta' \equiv \beta + k, \quad \alpha' \equiv \alpha + k \qquad (\text{mod } p).$$

π' ajoute aux p indices le même nombre k et est une puissance π^k de π.

Soient $\pi^k, \pi^{k'}, \ldots$ les diverses puissances qui interviennent, ρ le plus grand commun diviseur des $k, k', \ldots$, δ le plus grand commun diviseur de ρ et de p. γ sera constituée par les $\frac{p}{\delta}$ puissances de π^ρ, qui amèneront, à la place de v_{00}, $\frac{p}{\delta}$ racines. Comme γ est transitif, il faut avoir $\delta = 1$, ρ premier avec p et γ constitué par les p puissances de π.

51. Dans la formule (1) du n° **29** il peut arriver (cas de la seconde catégorie, mentionné au Chapitre I) qu'un des q_i, q_1 par exemple, soit zéro. x_1 est alors rationnel en x_0 et toutes les substitutions de G_0 sont de la forme $(x_0)(x_1)(\ldots)\ldots$. Les $M(M = n - 1$ dans la première catégorie; $M = n - 2$ dans la deuxième) q_i qui ne sont ni nuls ni infinis sont fournis par la formule (n° **9**)

$$(1)\qquad q_i = g_h \lambda^k, \qquad h = 0, 1, \ldots, s-1, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1;$$
$$\lambda^m = 1, \qquad M = ms, \qquad m = pr.$$

Divisons l'entier k par l'entier r; nommons d le reste et l le quotient: on aura $k = lr + d$ et la formule (1) devient

$$g_h \mu^l \lambda^d, \qquad \mu = \lambda^r, \qquad \mu^p = 1;$$

où $l = 1, \ldots, p$. Réunissons dans un même système X_e les x_i pour lesquels le q_i correspondant comporte une même valeur pour $g_h \lambda^d$. Il y aura rs systèmes X_e, puisque l'expression $g_h \lambda^d$ a rs valeurs, et chaque système comportera p racines, distinguées entre elles par les p valeurs de l'exposant l; $e = 0, 1, \ldots, rs - 1$.

Si entre les p racines de l'équation binome P_p (n° **30**), j'effectue la substitution π, q_i se multiplie par μ et l'indice l s'accroît d'une unité. Il se produit entre les x une substitution ϖ, qui, laissant fixes les rs systèmes X, permute circulairement les p racines d'un même système X; $\varpi^p = 1$.

Je dis que G_0 *est constitué par les p puissances de* ϖ, autrement dit ϖ est la substitution $\mathfrak{A}$ du n° **29**.

En vertu de la formule

$$x_i = x_0 + \frac{1}{c_0 - c_0 q_i},$$

et de l'adjonction de x_0 à h_n, on peut écrire

$$x_i = F(c_0) = F(c_{00}), \qquad F \text{ rationnelle}.$$

Toute fonction $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ rationnelle de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et à coefficients rationnels devient une fonction analogue $\chi(c_{00})$ de la seule

racine $v_0 = v_{00}$ de P_p (n° **30**). Réciproquement les racines v_{0i} de P_p sont rationnelles en $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Effectuant dans le second membre de l'identité

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \chi(v_{00}),$$

la substitution π du groupe γ de P_p, on effectue dans le premier membre de l'identité et entre les $x_1, \ldots, x_{n-1}$ la substitution ϖ, et réproquement. Si ψ est invariable par ϖ, χ est invariable par π, c'est-à-dire rationnelle, puisque le groupe γ (n° **30**) de P_p ne comprend que les puissances de π. ψ est rationnelle.

Réciproquement, si ψ est rationnelle, χ l'est aussi; χ est invariable par π et ψ est invariable par ϖ.

G_0 est constitué par les p puissances de ϖ et ϖ est précisément $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{K} = p$.

32. Il découle de là plusieurs conséquences.

Le nombre p degré de l'équation binome irréductible $v_0^p - V_0 = 0$ est le même pour tous les indices $0, 1, 2, \ldots, n-1$, contrairement à l'hypothèse provisoire du n° **10**.

Nous avons vu (n° **29**) que, si $\mathfrak{K} = p$, $\mathfrak{K} = m = p$.

Je dis que la substitution $E^{-1} = | z, \quad z + e |$ introduite au n° **19** pour rendre $\mathfrak{A}$ canonique est inutile.

e est déjà zéro pour $m > 1$. Or, pour $m = 1$, $p = 1$ et $\mathfrak{A}$ est canonique comme se réduisant à l'unité, puisque l'ordre $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{A}$ se réduit à l'unité.

Je supposerai dorénavant $\mathfrak{A}$ canonique.

33. L'équation $D, D(u) = 0$, du n° **23**, a pour racines les N quantités

$$u_j = s_j[u_0], \qquad s_0 = 1 \qquad (j = 0, 1, \ldots, N-1),$$

les s_j étant les ς de S. Cela nous permet de construire sur-le-champ cette équation D.

On sait que tout groupe linéaire fractionnaire S, d'ordre fini N, possède un *invariant absolu* $\Psi(z)$. Je nomme ainsi le quotient $\Psi(z) = \psi(z) : \varphi(z)$ de deux polynomes ψ et φ dont l'un au moins est

du degré N par rapport à l'indéterminée z et l'autre a un degré égal ou inférieur à N; les coefficients des deux polynomes sont numériques.

$\Psi(z)$ possède la double propriété suivante :

C'est un invariant absolu vis-à-vis de toute ϱ de S, effectuée sur z;

Tout invariant absolu, vis-à-vis les ϱ de S, est une fonction rationnelle de Ψ. On trouvera au Tome XII des *Mathematische Annalen*, p. 168, la liste, dressée par M. Klein, des Ψ afférents aux cinq types de groupes S.

Je ne considérerai pas comme distincts Ψ et $P(\Psi)$, P étant une substitution linéaire fractionnaire quelconque à coefficients numériques.

34. Soit r_0 une quantité quelconque. L'équation de degré N qui a pour racines les transformées $s_j[r_0]$ de r_0 par les substitutions s_j de S $[j = 0, 1, \ldots, N-1]$ pourra s'écrire

$$\Psi(z) = \Psi(r_0).$$

En effet r_0 est racine et l'équation ne change pas quand l'on remplace z par $s_j[z]$.

Soit u_0 une racine de l'équation D du n° **25**; D s'écrira, en vertu de ce qui vient d'être dit,

$$\Psi(u) = \Psi(u_0).$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\Psi(u_0) = \Psi(u_1) = \ldots = \Psi(u_{N-1})\\ &= \text{fonction symétrique des racines de D}\\ &= \text{fonction rationnelle des coefficients de D}\\ &= \text{fonction rationnelle des coefficients } a \text{ (n° 1) de } h_n.\end{aligned}$$

En effet (n° **25**), les coefficients de D sont rationnels par rapport aux a.

En résumé D s'écrira

$$\Psi(u) = T,$$

T étant une expression *rationnelle* au sens du n° **1**.

35. L'équation D, qui vient d'être construite, est-elle irréductible comme l'exige le raisonnement du n° **24**?

Oui, lorsqu'on envisage $T(t)$ comme une variable simple ou une lettre unique. Autrement dit : D *ne possède aucune racine commune avec une équation* D′, *de degré* $N' < N$, *qui ait ses coefficients de la forme* $\varpi(T)$ *et qui soit irréductible;* $\varpi(T)$ désignant le quotient de deux polynomes en T à coefficients numériques.

Désignons, en effet, par $u_0, u_1, u_2, \ldots$ les N′ racines de D′, qui sont aussi des racines de D. On aura (n° **55**)

$$u_l = s_l[u_0], \qquad l = 0, 1, \ldots, N' - 1,$$

s_l étant une ς de S, $s_0 = 1$. Je dis que *les* s_l *forment un groupe* S′ *contenu dans* S. Il suffira de montrer que $s_1 s_2[u_0]$, par exemple, est aussi racine. Le groupe de D′ étant transitif contiendra au moins une substitution $\sigma = (u_0 u_2 \ldots)(u_1 u_3 \ldots)(\ldots), \ldots$; u_3 étant la racine que σ fait succéder à u_1. σ ne change pas la valeur nulle de l'expression $u_1 - s_1[u_0]$ et il vient

$$0 = u_3 - s_1[u_2] = u_3 - s_1 s_2[u_0];$$

par suite, $s_1 s_2[u_0]$ est racine. Cela posé, D′, s'obtient par le procédé du n° **54** et s'écrit

$$\Psi'(u) = T'(t),$$

Ψ' étant l'invariant absolu de S′. On aurait, par hypothèse,

$$T' = \varpi(T),$$

c'est-à-dire une égalité ω à coefficients numériques :

$$\Psi'(u) = \varpi[\Psi'(u)].$$

ω n'est pas une équation en u, car elle admettrait pour racines celles de D′, qui seraient alors des constantes. Cela est impossible, car il y aurait des d_α constants (n° **22**, lemmes II et III). Donc ω est une identité. Cela est encore absurde, car Ψ' est l'invariant absolu de S′ seulement, tandis que $\varpi(\Psi')$ est invariant absolu pour S.

Par contre, en particularisant T, on détruit facilement l'irréductibilité de D. Voici des exemples simples de ce fait :

Nommons Θ_r la canonique $\mathfrak{L}$ d'ordre r.

Prenons S circulaire et dérivé de Θ_N, $\Psi(z) = z^N$; D est $u^N - T = 0$. D est réductible si $T^{\frac{1}{p}} =$ rationnelle, p étant un diviseur de N.

Prenons encore S pyramidal, en combinant Θ_M, $N = 2M$, avec la substitution $|z \quad z^{-1}|$. On a

$$\Psi(z) = z^M + z^{-M}.$$

D s'écrit :

$$u^{2M} - Tu^M + 1 = 0,$$

et devient réductible dès que $(T^2 - 4)^{\frac{1}{2}} =$ rationnelle.

Dans le présent Mémoire, je traiterai toujours T comme une variable simple et D comme irréductible. Je réserve, pour un Travail ultérieur, la discussion des équations D réductibles et des anharmoniques h_n *dégénérées*, qui prennent alors naissance.

56. La construction effective du polynome réduit (n° **18**) ne présente pas de difficulté. Soit q_0 une racine du polynome. q_0 est invariable par la substitution R et q_0 est numériquement déterminée. Les $N = np$ quantités $s_j[q_0]$ se réduisent à n distinctes dont chacune est répétée p fois. L'équation

$$\psi(q) : \varphi(q) = \Psi(q) = \Psi(q_0) = \psi(q_0) : \varphi(q_0)$$

a n racines, chacune avec le degré p de multiplicité. Le polynome en q de degré N

$$\begin{vmatrix} \psi(q) & \varphi(q) \\ \psi(q_0) & \varphi(q_0) \end{vmatrix}$$

est la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte du polynome réduit, lequel se trouvera ainsi construit.

Nous avons pris R canonique, d'où $q_0 = \infty$, mais le raisonnement est indépendant de la canonicité de R; il suffit que $R[q_0] = q_0$.

CHAPITRE V.

NATURE DE L'IRRATIONNALITÉ POUR LES RACINES DE L'ANHARMONIQUE.

57. Les n racines x_i de l'équation anharmonique h_n ont été (n° **27**) exprimées rationnellement au moyen des w_α, c'est-à-dire d'une quelconque des racines u_j de l'équation D. La nature des irrationnelles x_i est théoriquement connue, puisque D vient d'être construite.

Mais je ne m'en tiendrai pas là. Je mettrai les x_i sous une forme telle que la constance du rapport anharmonique de quatre x_i deviendra évidente.

Reprenons, à cet effet, les formules, déjà tant de fois considérées,

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - c_\alpha q_{\alpha i}} = \sigma_\alpha [q_{\alpha i}].$$

x_α et c_α sont des fonctions rationnelles de $w_\alpha = d_\alpha^p$ (n° **27**), puisque (n° **52**) $\pi = p$, $d_\alpha = c_\alpha : c_\alpha$, puisque $e = 0$ (n^{os} **52** et **20**). On écrira

$$x_\alpha = \zeta(d_\alpha^p), \qquad c_\alpha^{-1} = \zeta(d_\alpha^p)$$

et

$$x_i = \xi(d_\alpha^p) + \zeta(d_\alpha^p)\frac{d_\alpha}{d_\alpha - q_{\alpha i}} = F(d_\alpha, q_{\alpha i}).$$

Le rapport anharmonique de quatre x_i est évidemment constant, puisque c'est celui des quatre constantes $q_{\alpha i}$ correspondantes.

58. La fonction rationnelle $F(X, Y)$,

$$F(X, Y) = \xi(X^p) + \zeta(X^p)\frac{X}{X - Y},$$

des deux indéterminées X et Y possède une propriété importante, qui servira pour la construction effective de F.

Soient :

u une racine quelconque de l'équation D (n° **25**);
q une racine quelconque du polynome réduit.

La propriété signalée est celle-ci : *L'expression*

$$F(u, q)$$

possède l'invariance absolue vis-à-vis de toute ς *de* S, *effectuée* SIMULTANÉMENT *sur* u *et* q.

La proposition est évidente pour la canonique

$$R = [z, \rho z], \qquad \rho^p = 1.$$

S dérive de R et des n substitutions s_α (n° **17**). Il suffira de démontrer l'invariance de $F(u, q)$ vis-à-vis des n substitutions s_α.

39. On peut toujours, pour un choix convenable des entiers l et α, poser

$$u = \rho^l d_\alpha \qquad (\text{n° } \mathbf{21}).$$

En vertu de ce qui vient d'être dit et par l'intervention de R^{-l},

$$F(u, q) = F(\rho^l d_\alpha, q) = F(d_\alpha, \rho^{-l} q).$$

On peut toujours, pour un choix convenable de l'indice i, poser $\rho^{-l} q = q_{\alpha i}$, puisque la substitution R permute simplement les termes du système Q (n° **11**); alors

$$F(u, q) = F(d_\alpha, q_{\alpha i}) = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = x_i,$$

avec nos notations habituelles (n° **57**).

L'indice β étant quelconque on a

$$s_\alpha[q_{\alpha i}] = s_\beta[q_{\beta i}] \qquad (\text{n° } \mathbf{17}),$$
$$s_\alpha[d_\alpha] = s_\beta[d_\beta] \qquad (\text{n° } \mathbf{21}),$$
$$d_\alpha = s_\alpha^{-1} s_\beta[d_\beta], \qquad q_{\alpha i} = s_\alpha^{-1} s_\beta[q_{\beta i}],$$
$$F(u, q) = F(s_\alpha^{-1} s_\beta[d_\beta], \quad s_\alpha^{-1} s_\beta[q_{\beta i}]).$$

Mais aussi (n° **37**)

$$F(u, q) = x_i = F(d_\beta, q_{\beta i}) = \sigma_\beta[q_{\beta i}]$$

et

$$F(d_\beta, q_{\beta i}) = F(s_\alpha' s_\beta[d_\beta], s_\alpha' s_\beta[q_{\beta i}]).$$

Changeons α en β et réciproquement

$$F(u, q) = F(d_\alpha, q_{\alpha i}) = F(T_\beta[d_\alpha], T_\beta[q_{\alpha i}]), \qquad T_\beta = s_\beta' s_\alpha.$$

L'invariance de $F(u, q)$ est démontrée vis-à-vis du groupe S dérivé de R et des T_β. Or

$$T_0 = s_\alpha, \qquad s_\beta = s_\alpha T_\beta' = T_0 T_\beta',$$

S′ coïncide avec S, comme dérivé aussi de R et des s.

La proposition du n° **38** est complètement établie.

40. Le théorème subsiste évidemment, quand on pose $u = M[\Omega]$, $q = M[\eta]$, M étant une substitution linéaire fractionnaire quelconque, et quand on envisage, au lieu de S, le groupe $M^{-1}SM$. Un calcul simple montre que

$$F(u, q) = F(M[\Omega], \quad M[\eta]) = P \times \left(\frac{1}{\Omega - \eta} + Q\right),$$

P et Q étant rationnels en Ω, sans contenir η.

Je choisirai bien entendu M de façon à mettre S sous une forme simple, celle de MM. Jordan et Klein, par exemple, car S a été pris jusqu'à présent sous une forme très particulière, celle où la substitution R est canonique.

41. Soient donc :

le groupe S, mis sous forme nouvelle;
$\Psi(z)$ son invariant absolu (n° **33**);
$\Psi(\Omega) = T$ l'équation W qui remplace l'équation D du n° **34**;
$H(\eta)$ le polynome réduit, construit comme il est expliqué au n° **36**;
η_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, les n racines du polynome réduit H, avec $q_i = M[\eta_i]$;

$\Omega = \Omega_0 = M^{-1}[u_0]$ la racine de W qui correspond à la racine $u_0 = d_0$ de D.

L'égalité (n° **37**)

$$x_i = \sigma_0[q_{0i}] - \sigma_0[q_i] = x_0 + \frac{d_0}{c_0(d_0 - q_i)} = F(u_0, q_i)$$

devient, en vertu de ce qui a été dit au n° **40**,

$$x_i = P(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} + Q(\Omega)\right] = P(\Omega)\,\varpi(\Omega, \eta_i).$$

Je vais construire directement P et Q, en m'appuyant sur le théorème du n° **38**.

42. On a (n° **1**) $\sum_i x_i = 0$; donc

$$\sum_i x_i = P\left(nQ + \sum_i \frac{1}{\Omega - \eta_i}\right) = 0.$$

L étant l'algorithme du logarithme népérien, on a

$$\sum_i \frac{1}{\Omega - \eta_i} = \frac{\partial}{\partial\Omega}\sum_i L(\Omega - \eta_i) = \frac{\partial}{\partial\Omega} L \prod_i (\Omega - \eta_i)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\Omega} LH(\Omega) = \frac{H'(\Omega)}{H(\Omega)},$$

H′ étant la dérivée du polynome réduit H.

Ainsi

$$Q = -\frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)},$$

Enfin

$$x_i = f(\Omega, \eta_i) = P\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right] = P(\Omega)\,\varpi(\Omega, \eta_i).$$

43. Posons $\Omega' = s[\Omega]$, $\eta'_i = s[\eta_i]$,

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad (ad - bc = 1)$$

étant une substitution quelconque g de S.

En vertu du théorème du n° **38**,

$$f(\Omega', \eta_i') = f(\Omega, \eta_i) = P(\Omega')\varpi(\Omega', \eta_i).$$

Soient X et Y deux indéterminées quelconques, avec $X' = s[X]$, $Y' = s[Y]$; on aura par un calcul facile

$$X' = (aX + b)[\omega(X)]^{-1}, \qquad \omega(X) = cX + d = \omega,$$

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = [\omega(X)]^{-2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial X'} = \omega^2, \qquad \frac{1}{X' - Y'} = \frac{\omega(X)\omega(Y)}{X - Y}.$$

La substitution s ne fait que permuter ensemble les n racines de $H(\eta)$, donc, L étant toujours le logarithme,

$$H(\eta') = [\omega(\eta)]^{-n} K H(\eta), \qquad K = \text{const.}, \qquad \eta' = s[\eta].$$

$$\frac{H'(\eta')}{H(\eta')} = \frac{\partial}{\partial \eta'} LH(\eta') = \frac{\partial}{\partial \eta}[LK + LH(\eta) - nL\omega(\eta)]\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}$$

$$= [\omega(\eta)]^2\left[\frac{H'(\eta)}{H(\eta)} - \frac{nc}{\omega(\eta)}\right].$$

Bref, sous le bénéfice des calculs ci-dessus,

$$\varpi(X, Y) = \frac{1}{X - Y} - \frac{H'(X)}{nH(X)}$$

devient

$$\varpi(X', Y') = [\omega(X)]^2 \varpi(X, Y).$$

Enfin, la relation

$$P(\Omega)\varpi(\Omega, \eta_i') = P(\Omega')[\omega(\Omega)]^{-2}\varpi(\Omega, \eta_i) = P(\Omega)\varpi(\Omega, \eta_i)$$

donne

$$(1) \qquad P(\Omega') = (c\Omega + d)^{-2} P(\Omega).$$

44. Soient $P(\Omega)$ et $P_1(\Omega)$ deux expressions satisfaisant à la condition (1). Le quotient $P_1 : P$ sera invariable par toutes les substitutions $\mathfrak{L}$ de S, donc $P_1 : P$ est une fonction rationnelle de l'invariant absolu $\Psi(\Omega)$ de S. Or, Ω est une racine de l'équation W (n° **41**)

$\Psi(\Omega) = T =$ rationnelle; $P_1 : P = \tau =$ rationnelle; P_1 ne diffère de P que par un facteur rationnel τ. Supprimer ce facteur τ, c'est, en vertu de la formule

$$x_i = P(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right],$$

multiplier tous les x_i par un facteur rationnel. Cela est indifférent (n° **1**).

Il suffira donc d'obtenir, d'une façon quelconque, *une seule* fonction $P(\Omega)$ satisfaisant à la condition (1) du n° **43**.

Nommons Ψ' la dérivée de l'invariant absolu Ψ. On aura

$$\Psi(\Omega') = \Psi(\Omega), \qquad \Psi'(\Omega') = \Psi'(\Omega)\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega'},$$
$$\Psi'(\Omega') = \Psi'(\Omega)(c\Omega + d)^2.$$

Il suffit de poser

$$P(\Omega) = \frac{1}{\Psi'(\Omega)}.$$

45. L'expression définitive des irrationnelles x_i sera

$$f(\Omega, \eta_i) = x_i = \Psi'^{-1}(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right]$$

avec

$$\Psi(\Omega) = T \qquad \text{et} \qquad H(\eta_i) = 0,$$

Ψ étant l'invariant absolu et $H(\eta_i)$ le polynome réduit du groupe S; H' et Ψ' sont les dérivées de H et de Ψ.

Notons que *la fonction rationnelle* $f(X, Y)$ *des deux arguments* X *et* Y *est à coefficients* NUMÉRIQUES.

46. Considérons l'expression $f(\Omega, \eta_i)$ où Ω et η_i sont des racines quelconques de W et du polynome réduit respectivement. On a

$$\Omega = s_j[\Omega_0] \qquad \text{et} \qquad \eta_i = s_l[\eta_0],$$

s_j et s_l étant deux ς de S. En vertu du théorème du n° **38**, il viendra à volonté

$$f(\Omega, \eta_i) = f(s_j[\Omega_0], s_l[\eta_0]) = f(\Omega_0, s_j^{-1}s_l[\eta_0]).$$

ou, de même,

$$\mathfrak{f}(\Omega, \eta_i) = \mathfrak{f}(s_i^{-1} s_j [\Omega_0], \eta_{i0}).$$

Toutes les n N valeurs possibles de $\mathfrak{f}(\Omega, \eta_i)$ s'obtiendront donc, soit en associant à une racine, arbitrairement choisie une fois pour toutes, de W, successivement les n racines du polynome réduit, soit en associant à une racine du polynome réduit, arbitrairement choisie une fois pour toutes, successivement les $N = np$ racines Ω de W.

Le premier procédé fournit les n valeurs

$$x_i = \mathfrak{f}(\Omega_0, \eta_{i0}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1);$$

le second procédé fournit les N valeurs

$$\mathfrak{f}(\Omega_j, \eta_{i0}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Ces n valeurs se réduisent à n distinctes, chacune étant répétée p fois.

En effet, effectuons dans $\mathfrak{f}(\Omega_j, \eta_{i0})$, sur Ω_j et η_{i0}, simultanément les p substitutions de S_0. La valeur de $\mathfrak{f}$ ne change pas, ni η_{i0}, tandis que Ω_j est remplacée successivement par $p-1$ autres racines de W. Nommons $\zeta(\Omega)$ l'invariant absolu du groupe S_0. $\mathfrak{f}(\Omega, \eta_{i0})$ est une expression rationnelle $\mathfrak{R}(\zeta, \eta_{i0})$. Les N substitutions de S donnent n expressions, $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$. Les n valeurs distinctes de $\mathfrak{f}(\Omega, \eta_{i0})$ sont fournies par le Tableau

$$\mathfrak{R}(\zeta_i, \eta_{i0}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

47. Si l'on élimine Ω entre les deux équations

$$\Psi(\Omega) = \mathrm{T} \qquad \text{et} \qquad x = \mathfrak{f}(\Omega, \eta_{i0}),$$

la résultante, qui est en x du degré $N = np$, aura pour racine p^{uple} chacune des n quantités $x_i = \mathfrak{R}(\zeta_i, \eta_{i0})$ et sera la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte du polynome $f(x)$, premier membre de h_n. Ce dernier se trouvera ainsi construit.

48. En résumé, *toute équation anharmonique peut s'écrire*

$$f(x, \mathrm{T}) = 0,$$

où f est un polynome à coefficients numériques et T *une fonction unique de la variable t, rationnelle au sens du* n° 1.

La structure du polynome f ne dépend que de la nature de S et du choix de la substitution R dans ce groupe S.

Le genre de la relation algébrique qui lie x et T est évidemment zéro, puisque x et T s'expriment rationnellement à l'aide d'un même paramètre Ω

$$x = f(\Omega, \tau_{i0}), \qquad T = \Psi(\Omega).$$

Si x et T sont l'ordonnée et l'abscisse d'un point dans un plan, la courbe $f = 0$ serait intéressante à construire, mais ces recherches, que j'ai esquissées dans ma Note du 13 février 1899, seront mieux à leur place dans une publication ultérieure.

CHAPITRE VI.

CLASSIFICATION DES ANHARMONIQUES.

49. On sait que le groupe S linéaire, fractionnaire, d'ordre fini N, appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan.

Voici l'énumération des cinq types :

I. — Circulaire (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein) dérivé d'une substitution unique Θ d'ordre N.

II. — Pyramidal (*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein), dérivé des deux substitutions Θ et ε; $N = 2m$; $\Theta^m = 1$, $\varepsilon^2 = 1$; $\varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1}$.

III. — *Tétraédrique*, $N = 12$.

IV. — *Octaédrique*, $N = 24$.

V. — *Icosaédrique*, $N = 60$.

Je renvoie au Mémoire de M. Jordan (t. 84 du *Journal de Crelle*) pour le Tableau des trois derniers types, et au Mémoire de M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. XII, p. 168) pour la liste des invariants absolus $\Psi(z)$ afférents aux cinq types.

50. Je me propose, dans ce Chapitre, d'examiner jusqu'à quel point peut être choisie arbitrairement dans S la substitution R, dont les p puissances constituent le groupe S_0; $N = np$.

Si $p = 1$, $R = 1$ et S appartient à l'un quelconque des cinq types; mais il n'en est plus de même dès que $p > 1$.

Je rappellerai (Chapitre I) que p divise M,

$M = n - 1$ pour la première catégorie,

$M = n - 2$ pour la seconde catégorie.

On a vu que la seconde catégorie se présente quand le groupe G_0 de G, qui laisse immobile une racine x_0, laisse aussi immobile une seconde racine x_1. Alors n est pair et les racines sont associées par couples, tels que x_0 et x_1.

Quant à la première catégorie, elle se présente toutes les fois qu'on n'a pas affaire à la deuxième catégorie. G_0 ne laisse immobile qu'une seule racine x_0.

Dès que $p > 1$, S ne peut être du type circulaire.

En effet, mettons R, qui est une puissance de Θ (n° **49**), sous forme canonique. Les s_α (n° **17**), qui sont aussi des puissances de Θ, deviennent canoniques; cela est absurde (n° **19**, lemme H).

51. *Si S est circulaire, h_n est une équation binome.*

En effet, alors

$$p = 1, \qquad n = N, \qquad \Psi(z) = z^n = T, \qquad H(\eta) = \eta^n - K,$$

$$K = \text{const.}, \qquad x = f(z, \eta) = \frac{1}{nz^{n-1}}\left(\frac{1}{z - \eta} - \frac{z^{n-1}}{z^n - K}\right);$$

d'où, par un calcul facile, puisque $z^n = T$,

$$\frac{\eta}{z} = 1 - \left(nTx + \frac{T}{T - 1}\right)^{-1},$$

ou simplement $\frac{\eta}{z} = x$ (eu égard au n° **1**).

Enfin

$$\frac{K}{T} = x^n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'équation binome est bien un cas particulier de l'anharmonique.

52. Supposons, pour $N = 2m$, que S appartient au type pyramidal et dérive de Θ et ε, avec

$$\Theta^m = 1, \qquad \varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1}.$$

Les N substitutions de S sont : 1° les m puissances de Θ, et 2° les m substitutions $\varepsilon\Theta^r$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$, toutes d'ordre deux.

Laquelle prendrons-nous pour R ? Prenons d'abord $R = \Theta^g$, avec $p = \frac{m}{\delta}$, $\delta =$ le plus grand commun diviseur de m et de g. Mettons R sous forme canonique, Θ sera aussi canonique. Si $\delta > 1$, $p < m$, et il y aura des puissances de Θ en dehors du groupe S_0; ces puissances de Θ seront canoniques, ce qui est absurde (n° **19**, lemme II). Si, au contraire, $\delta = 1$, $p = m$, $N = 2m = np = nm$ et $n = 2$, ce qui est absurde.

Il faut donc prendre pour R une des $\varepsilon\Theta^r$; alors $p = 2$ et $m = n$.

On peut choisir l'argument z de façon à avoir

$$\Theta = \begin{vmatrix} z & \theta z \end{vmatrix}, \qquad \theta^n = 1, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} z & \frac{1}{z} \end{vmatrix};$$

l'invariant absolu

$$\Psi(z) = z^n + z^{-n}.$$

Pour la première catégorie, p ou 2 divise $n - 1$ et n est impair.

Pour la deuxième catégorie, 2 divise $n - 2$ et n est pair.

En résumé : *pour $p > 1$ et S pyramidal, $p = 2$. n est impair pour la première catégorie, pair pour la seconde.*

Entre les n racines $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de h_n, G dérive des deux substitutions

$$\Theta = (0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$\bar{\varepsilon} = (0)(1, n-1)(2, n-2)\ldots, \qquad \text{si } n \text{ est impair;}$$

$$\bar{\varepsilon} = (0)(r)(1, n-1)(2, n-2)\ldots, \qquad \text{si } n = 2r = \text{pair.}$$

53. Prenons S tétraédrique, $N = 12$. S est isomorphe au groupe alterné entre quatre lettres; S contient des substitutions d'ordre 2 ou 3 seulement.

Formons le Tableau suivant :

$$N = pn = 12.$$

p	2	3
n	6	4
$n-1$	5	3
$n-2$	4	2

Il y aura une anharmonique $n = 6$, $p = 2$ de la seconde catégorie et une anharmonique $n = 4$, $p = 3$ de la première catégorie.

34. Prenons S octaédrique ; $N = 24$. S est isomorphe au groupe général entre quatre lettres et contient des substitutions d'ordre 4 au plus. Donc $p = 2$, ou 3, ou 4. On a encore le Tableau :

$$N = pn = 24.$$

p	2	3	4
n	12	8	6
$n-1$	11	7	5
$n-2$	10	6	4

Il n'y a pas de h_n de première catégorie et trois existent de seconde catégorie :

$$n = 12, \qquad p = 2,$$
$$n = 8, \qquad p = 3,$$
$$n = 6, \qquad p = 4.$$

35. S icosaédrique est isomorphe au groupe alterné en cinq lettres et contient des substitutions d'ordre 2, ou 3, ou 5. On a le Tableau, où $N = np = 60$,

p	2	3	5
n	30	20	12
$n-1$	29	19	11
$n-2$	28	18	10

Aucune h_n de première, mais trois de la seconde catégorie :

$$n = 30, \qquad p = 2,$$
$$n = 20, \qquad p = 3,$$
$$n = 12, \qquad p = 5.$$

36. Une précaution est encore à prendre dans le choix, pour un groupe S donné, de la substitution R.

On a vu que, R étant canonique, il ne peut exister dans S des canoniques autres que les p puissances de R (n° **19**, lemme II). Aucune $\mathfrak{L}$ de S n'est donc échangeable avec les puissances de R, en dehors de ces puissances elles-mêmes. Donc R ne peut être puissance d'une substitution de S, autre que les puissances de R.

On ne construira pas toutes les anharmoniques qui correspondent aux diverses combinaisons de N, n, p qui viennent d'être énumérées. Ce serait un calcul assez long, désormais sans difficulté et sans intérêt théoriques. On se bornera, dans le Chapitre suivant, à donner quelques exemples simples. Je rappelle, du reste, que, dans ma Note : *Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1900), j'ai construit directement et d'une façon plus élémentaire les anharmoniques h_4 et h_5. Je renverrai à ce Travail par une notation, telle que (*Bulletin de la Société mathématique*, 7°) par exemple.

37. Terminons le présent Chapitre par quelques indications sur l'équation $\mathfrak{U}$ de Riccati elle-même (n° **1**).

f ayant la signification exposée au précédent Chapitre, je dis que *l'intégrale générale de* $\mathfrak{U}$ *est*

$$\mathrm{f}(z, \mathrm{C}),$$

où C *est le paramètre arbitraire et* z *une fonction de* t *définie par l'équation*

$$\Psi(z) = \mathrm{T}(t).$$

Ψ et T ont leur signification habituelle.

Soient x_0, x_1, x_2 trois racines quelconques de h_n, savoir

$$x_0 = \mathrm{f}(z, \eta_0), \qquad x_1 = \mathrm{f}(z, \eta_1), \qquad x_2 = \mathrm{f}(z, \eta_2),$$

et u une intégrale quelconque de $\mathfrak{U}$. On peut toujours écrire

$$(1) \qquad u = \mathrm{f}(z, \xi),$$

ξ étant une fonction de t définie, pour u donné, par l'identité (1) elle-même.

Le rapport anharmonique

$$\mathcal{R}(u, x_0, x_1, x_2) = \frac{(u - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(u - x_1)}$$

des quatre intégrales u, x_0, x_1, x_2 de U est une constante K. Mais

$$K = \mathcal{R}(u, x_0, x_1, x_2) = \mathcal{R}(\xi, \eta_0, \eta_1, \eta_2),$$

d'où

$$\frac{\xi - \eta_0}{\xi - \eta_1} = K \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 - \eta_1}.$$

ξ est une constante dont la valeur dépend de celle de K. ξ est donc le paramètre arbitraire C. C. Q. F. D.

38. On pouvait prévoir que, dans la présente théorie, on rencontrerait tôt ou tard les groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini.

En effet, dans ses *Leçons de Stockholm* (p. 29 et suiv.), M. Painlevé montre comment d'une équation U de Riccati

$$u' = \mathfrak{B}_0(t) + u\mathfrak{B}_1(t) + u^2\mathfrak{B}_2(t),$$

on déduit une équation Z

$$z'' = zM(t),$$

différentielle linéaire, homogène, du second ordre. Les équations U et Z ont les relations mutuelles que voici :

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de Z, l'intégrale générale de U est

$$z = \frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2}.$$

Si u_1, u_2, u_3 sont trois intégrales de U, elles donnent une intégrale z_1 de Z par la relation

$$z_1^2 = \frac{u_2 - u_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}.$$

Si les u sont racines de h_n, z_1 est aussi racine d'une équation algé-

brique, à coefficients *rationnels* (au sens du n° 1). Prenons, ce qui ne change pas le fond des choses, pour variable, non plus t, mais $T(t)$. z_1 devient algébrique. Or on sait quel rôle essentiel jouent les groupes S dans l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires.

J'espère, dans un Travail ultérieur, revenir sur la dépendance mutuelle des équations différentielles U et Z.

Quant à la construction effective des U qui correspondent à des h_n données, elle ne présente aucune difficulté. Prenons pour variable non plus t, mais s, liée à t par l'équation W,

$$\Psi(s) = T(t).$$

On aura, pour l'intégrale générale de U (n° 57),

$$u = f(s, C),$$

$$u = \frac{1}{\Psi'(s)}\left[\frac{1}{s - C} - \frac{H'(s)}{nH(s)}\right],$$

d'où

$$C = s - \left[u\Psi'(s) + \frac{H'(s)}{nH(s)}\right]^{-1}.$$

Prenons la dérivée $\frac{d}{ds}$, il viendra

$$\Psi'\frac{du}{ds} + u\Psi'' + \frac{d}{ds}\frac{H'}{nH} + \left(u\Psi' + \frac{H'}{nH}\right)^2 = 0,$$

ce qui est bien une équation de Riccati,

$$\Psi'' = \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}, \quad \ldots.$$

CHAPITRE VII.

ANHARMONIQUES DES QUATRIÈME ET CINQUIÈME DEGRÉS.

59. Comme exemple d'application pour les théories du présent Mémoire, je vais construire toutes les anharmoniques des quatrième et cinquième degrés, $n = 4$ et 5. Les résultats (n° **56**) sont à comparer avec ceux du *Bulletin de la Société mathématique*. Supposons d'abord $n = 4$.

p devant diviser ou $n - 1$ (première catégorie) ou $n - 2$ (deuxième catégorie) est un des trois nombres 1, 2 ou 3.

Nommons, pour abréger l'écriture, Θ_m la substitution canonique

$$\Theta_m = |\, z \quad \theta z \,|, \qquad \theta^m = 1,$$

d'ordre m, et ε la substitution d'ordre deux

$$\varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|.$$

L'invariant

$$2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)$$

du polynome général du quatrième degré

$$a_0 y^4 + 4 a_1 y^3 + 6 a_2 y^2 + 4 a_3 y + a_4$$

se nommera I.

L'invariant

$$6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

se nommera J.

60. Si $p = 1$, $N = 4$, S est circulaire ou pyramidal.

S circulaire dérive de l'unique substitution Θ_4 (*cas I*). S pyramidal dérive de Θ_2 combinée avec ε (*cas II*).

Si $p = 2$, $N = 8$. S ne peut être que pyramidal, dérivé de Θ_4 et de ε (*cas III*).

Si $p = 3$, $N = 12$. S ne peut être que tétraédrique (*cas IV*).

Examinons ces quatre cas.

61. *Cas I.* — On a (n° **31**) une équation binome.

Dans le cas actuel, l'invariant J des polynomes $f(x)$ et $H(\eta_1)$ est zéro. Le rapport anharmonique des quatre racines est harmonique, c'est-à-dire constant, ce qui doit être. C'est un cas particulier de l'équation h_4 *harmonique* (*Bulletin de la Soc. math.*, 6°), exclu (*Ibid.*, 7°) comme conduisant à une équation U de Riccati dégénérée.

62. *Cas II.* — S dérive de

$$\Theta_2 = |z \quad -z| \qquad \text{et de} \qquad \varepsilon = \left|z \quad \frac{1}{z}\right|.$$

$\Psi(z) = z^2 + z^{-2}$. Le polynome réduit est

$$H(\eta_1) = \eta_1^4 - 6k\eta_1^2 + 1;$$

W est

$$z^4 - 6Tz^2 + 1 = 0.$$

h_4 s'obtient en éliminant z entre l'équation W et

$$x = \frac{1}{2(z - z^{-3})}\left[\frac{1}{z - \eta_1} - \frac{z(z^2 - 3k)}{z^4 - 6kz^2 + 1}\right].$$

Le rapport anharmonique des quatre racines est une constante arbitraire, fonction de k. Le groupe G de h_4 provient de

$$\overline{\Theta_2} = (x_0 x_2)(x_1 x_3), \qquad \bar{\varepsilon} = (x_0 x_1)(x_2 x_3).$$

On a l'anharmonique construite au 13° du *Bulletin de la Société mathématique*.

63. *Cas III.* — S dérive de

$$\Theta_4 = |z \quad \theta z|, \qquad \theta = \sqrt{-1} \qquad \text{et de} \qquad \varepsilon = \left|z \quad \frac{1}{z}\right|.$$

$\Psi(z) = z^3 + z^{-3}$. L'équation W est

$$z^8 - Tz^4 + 1 = 0.$$

Le polynome réduit s'obtient en donnant à T (n° **56**) une valeur constante telle que le premier membre de W devienne carré parfait. On posera $T = 2$. Le polynome réduit est $\eta_1^4 - 1$. h_1 s'obtient en éliminant z entre W et

$$x = \frac{1}{4(z^3 - z^{-3})}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{z^3}{z^4-1}\right).$$

L'invariant $J = 0$ et le rapport anharmonique des quatre racines est harmonique. On a la h_1 *harmonique* du *Bulletin de la Société mathématique*.

64. *Cas IV.* — S est tétraédrique et dérive les deux $\mathfrak{L}$ binaires Θ_2 et ε jointes à la $\mathfrak{L}$ ternaire, $i^2 + 1 = 0$,

$$(1) \qquad \left| z \quad \begin{matrix} 1-i & z-1 \\ 1+i & z+1 \end{matrix} \right|.$$

$$\Psi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{z^4 + 1 + 2i\sqrt{3}\,z^2}{z^4 + 1 - 2i\sqrt{3}\,z^2}\right)^3.$$

Pour former le polynome réduit, employons le procédé du n° **56**, en prenant pour R la substitution (1).

R laisse fixe une racine de $\overset{1}{\psi}{}^3 = 0$ (ou de $\overset{1}{\varphi}{}^3 = 0$), parce que R permute ensemble les quatre racines, tout en étant d'ordre 3. L'équation quadratique $\eta_{10} = R[\eta_0]$ a donc une racine commune avec chacune des deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Prenons, par exemple, $\psi(\eta_{10}) = 0$.

Le polynome du douzième degré en η_1

$$\begin{vmatrix} \psi(\eta_1) & \varphi(\eta_1) \\ \psi(\eta_{10}) & \varphi(\eta_{10}) \end{vmatrix},$$

devient simplement, pour $\psi(\eta_{10}) = 0$,

$$\psi(\eta_1) = (\eta_1^4 + 1 + 2i\eta_1^2\sqrt{3})^3.$$

Le polynome réduit

$$\Pi(\eta_1) = \eta_1^4 + 1 + 2\eta_1^2 i\sqrt{3}.$$

Dans Π, on a (n° **39**),

$$a_0 = 1 = a_4, \qquad a_1 = a_3 = 0, \qquad a_2 = \frac{i\sqrt{3}}{3}$$

et l'invariant

$$I = (a_0 a_4 + 3a_2^2) = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre racines est équianharmonique.

h_4 s'obtiendra par le procédé ordinaire et sera l'équation *équianharmonique* du *Bulletin de la Société mathématique*.

On remarquera que, dans l'invariant absolu du groupe tétraédrique, nous avons, rectifiant une erreur à la page 168 du tome XII des *Mathematische Annalen*, changé z^4 en $-z^4$.

63. La discussion des h_5, $n = 5$, est très simple. $p = 1, 2, 3, 4$.

Le cas $[p = 1, N = 5]$ fournit un S circulaire et une h_5 binome (n° **51**).

Les cas $[p = 3, N = 15]$ et $[p = 4, N = 20]$ fournissent des S pyramidaux, ce qui est absurde (n° **52**).

Le cas $[p = 2, N = 10]$ est admissible (n° **52**) et fournit la h_5 construite au Chapitre II du *Bulletin de la Société mathématique*.

Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch;

PAR M. P. DUHEM.

Introduction.

Tout le monde connaît les équations des petits mouvements d'un solide isotrope, équations qui régissent aussi, comme l'a démontré Helmholtz, la propagation des flux de déplacement dans les milieux diélectriques. On sait également que Clebsch (1) a donné aux intégrales de ces équations une forme extrêmement utile en ce qu'elle décompose le petit mouvement le plus général d'un solide isotrope en un petit mouvement *longitudinal*, dénué de *rotation*, et un petit mouvement *transversal*, dénué de *dilatation*, chacun de ces petits mouvements dépendant de la classique équation du son. Malheureusement, la démonstration sommaire donnée par Clebsch laisse peut-être quelque place au doute.

Dans notre enseignement de la Faculté des Sciences de Bordeaux, nous avons donné du Théorème de Clebsch une démonstration très élémentaire (2) qui nous semble rigoureuse.

Cette démonstration s'étend sans peine et permet d'appliquer le Théorème de Clebsch à un type très général d'équations aux dérivées

(1) CLEBSCH, *Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXI; 1863).

(2) P. DUHEM, *Sur l'intégrale des équations des petits mouvements d'un solide isotrope* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, t. III; 1898).

partielles simultanées. Ce type comprend, comme cas particuliers, non seulement les équations des petits mouvements des solides isotropes, mais encore les équations des petits mouvements adiabatiques des fluides compressibles visqueux; d'ailleurs, ces deux catégories d'équations sont d'un intérêt très général en Physique; la première catégorie régit, hors du domaine de l'Électricité, la propagation d'une perturbation électrique dans un milieu diélectrique; la seconde n'a pas cours seulement en Hydrodynamique; c'est d'elle que dépend le flux électrique au sein d'un conducteur immobile. Enfin, ces deux catégories peuvent être regardées comme deux cas particuliers d'une catégorie plus générale, dont dépend le champ électrique dans un corps à la fois conducteur et diélectrique; à cette catégorie s'appliquent également les considérations suivantes.

CHAPITRE I.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE STOKES ET DE HELMHOLTZ.

---

1. Soient u, v, w trois fonctions de x, y, z, qui peuvent, en outre, dépendre d'autres variables, de t par exemple; soit A le vecteur dont u, v, w sont les composantes.

Deux combinaisons de ces fonctions se présentent fréquemment en Physique :

En premier lieu, la combinaison

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1}$$

que les géomètres anglais nomment

Div. A.

Si A représente un *déplacement* d'un milieu, Θ est la *dilatation cubique* au point (x, y, z) de ce milieu.

En second lieu, les trois combinaisons

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\[2ex] \Omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\[2ex] \Omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Si A représente un *déplacement* d'un milieu, $\frac{1}{2}\Omega_x$, $\frac{1}{2}\Omega_y$, $\frac{1}{2}\Omega_z$ sont les trois composantes de la *rotation instantanée* au point (x, y, z) de ce milieu; Ω_x, Ω_y, Ω_z sont les trois composantes d'un vecteur que les géomètres anglais désignent par

$$\text{Curl A},$$

et que les physiciens allemands nomment *Vortex* ou *Wirbel* de A.

2. Soient u, v, w trois fonctions continues de x, y, z, en un certain espace; prenons trois fonctions U, V, W définies, dans ce même espace, par les égalités

$$(3)\qquad \Delta U = u, \qquad \Delta V = v, \qquad \Delta W = w.$$

Chacune de ces fonctions est déterminée, dans l'espace considéré, à une fonction harmonique près; la théorie de la fonction potentielle nous enseigne, d'ailleurs, à exprimer ces fonctions sous forme d'intégrales triples.

On a identiquement

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Si donc on pose

$$(4)\qquad \Phi = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$(5)\qquad \begin{cases} P = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\right), \\[2ex] Q = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}\right), \\[2ex] R = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right), \end{cases}$$

ce qui nous donne visiblement

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

la première des égalités (3) devient la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Les deux autres égalités (7) s'obtiennent d'une manière analogue.

Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant données trois fonctions u, v, w des variables x, y, z, continues dans un certain espace, on peut, d'une infinité de manières, mettre ces fonctions sous la forme (7), *les trois fonctions* P, Q, R *vérifiant, en outre, l'égalité* (6).

Cette proposition, employée en premier lieu par M. Stokes et par Helmholtz, va nous servir de point de départ.

5. *Remarque.* — Si les trois fonctions u, v, w ont été, d'une manière quelconque, mises sous la forme (7), la relation (6) étant d'ailleurs vérifiée, les égalités (1) et (2) deviennent

$$\Theta = \Delta\Phi, \tag{8}$$

$$\Omega_x = -\Delta P, \qquad \Omega_y = -\Delta Q, \qquad \Omega_z = -\Delta R. \tag{9}$$

6. Supposons que l'on ait pu mettre trois fonctions u, v, w sous la forme (7), la relation (6) étant d'ailleurs vérifiée et les fonctions Φ, P, Q, R étant quatre fonctions harmoniques. Les égalités (1), (2), (8)

et (9) donnent alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les égalités (11) nous enseignent qu'il existe une fonction $z(x, y, z)$, uniforme si l'espace considéré est simplement connexe, telle que l'on ait

$$u = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial z}, \tag{12}$$

et l'égalité (10) devient alors

$$\Delta z = 0.$$

Réciproquement, les égalités (12) sont une forme particulière des égalités (6) et (7). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour que trois fonctions u, v, w soient respectivement les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse les mettre sous la forme (7), *où* Φ, P, Q, R *sont quatre fonctions harmoniques et où les trois fonctions* P, Q, R *vérifient la relation* (6).

3. *Pour que les trois expressions*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y},$$

où P, Q, R *vérifient la relation* (6), *soient les trois dérivées partielles d'une même fonction* V, *il faut et il suffit que les trois fonctions* P, Q, R *soient harmoniques; la fonction* V *est, elle aussi, harmonique.*

Pour démontrer la première partie de l'énoncé, il suffit de remarquer qu'en vertu de la relation (6), les conditions

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0$$

peuvent s'écrire

$$\Delta P = 0, \qquad \Delta Q = 0, \qquad \Delta R = 0,$$

et que les fonctions P, Q, R sont harmoniques.

Si ces conditions sont remplies, il existe une fonction V telle que l'on ait

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Il suffit de différentier la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et d'ajouter membre à membre les résultats obtenus pour obtenir l'égalité

$$\Delta V = 0,$$

qui démontre la seconde partie de l'énoncé.

6. *Réciproquement, si* V *est une fonction harmonique dans un certain espace* E, *ses dérivées partielles peuvent se mettre sous la forme* (13), *les fonctions* P, Q, R *étant harmoniques dans l'espace* E *et y vérifiant la relation* (6).

Soient :

(x, y, z) un point de l'espace E,

S la surface qui limite cet espace, surface que nous supposons convexe et sans point singulier,

dS un élément de la surface S,

(ξ, η, ζ) un point de l'élément dS,

n la demi-normale en ce point à la surface S, cette demi-normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace E.

Avec M. Carl Neumann, posons

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int V(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS,\\ U'(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int U(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS,\\ U''(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int U'(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les propositions suivantes sont connues :

Les fonctions

$$V(\xi, \eta, \zeta),\quad U(\xi, \eta, \zeta),\quad U'(\xi, \eta, \zeta),\quad U''(\xi, \eta, \zeta),\quad \ldots$$

sont toutes continues sur la surface S.

Lorsque l'indice i croît au delà de toute limite, la fonction

$$U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta)$$

tend vers une limite C qui a la même valeur sur toute la surface S.

La série

$$(15)\quad [V(\xi, \eta, \zeta) - U(\xi, \eta, \zeta)] + [U'(\xi, \eta, \zeta) - U''(\xi, \eta, \zeta)] + \ldots$$

converge uniformément sur la surface S et représente une fonction $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, continue sur cette surface.

La fonction $V(x, y, z)$ est, dans l'espace E, donnée par la série uniformément convergente

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} V(x, y, z) = C + \frac{1}{2\pi}\{&[U(x, y, z) - U'(x, y, z)]\\ &+ [U''(x, y, z) - U'''(x, y, z)] + \ldots\}. \end{aligned}\right.$$

Or la série (15) étant uniformément convergente, il en est visiblement de même de la série

$$[V(\xi,\eta,\zeta) - U(\xi,\eta,\zeta)]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} + [U'(\xi,\eta,\zeta) - U''(\xi,\eta,\zeta)]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} + \ldots$$
$$= \sigma(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n},$$

r étant la distance du point (ξ,η,ζ), variable sur la surface S à un point déterminé (x,y,z) du domaine E.

On peut alors intégrer cette série pour la surface S en intégrant chacun de ses termes, ce qui donne, en vertu des égalités (14) et (15),

$$(17)\qquad V(x,y,z) = C + \frac{1}{2\pi}\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS.$$

Cette égalité donne, à son tour,

$$(18)\qquad \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial x}\,dS.$$

Mais l'égalité

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

donne

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^3}[(x-\xi)\cos(n,x) + (y-\eta)\cos(n,y) + (z-\zeta)\cos(n,z)],$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial n} = \frac{3(x-\xi)^2 - r^2}{r^5}\cos(n,x) + \frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}\cos(n,y) + \frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}\cos(n,z)$$
$$= \frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}\cos(n,y) - \frac{3(y-\eta)^2 - r^2}{r^5}\cos(n,x)$$
$$\left[\frac{3(z-\zeta)^2 - r^2}{r^5}\cos(n,x) - \frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}\cos(n,z)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y-\eta}{r^3}\cos(n,x) - \frac{x-\xi}{r^3}\cos(n,y)\right]$$
$$- \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x-\xi}{r^3}\cos(n,z) - \frac{z-\zeta}{r^3}\cos(n,x)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,x)\right]$$
$$- \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,x) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)\right].$$

Si donc on pose

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int\sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,y)\right]dS,\\
Q(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int\sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,x) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)\right]dS,\\
R(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int\sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,x)\right]dS,
\end{aligned}\right.$$

l'égalité (18) devient la première des égalités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

D'ailleurs, les égalités (19) montrent immédiatement que les trois fonctions P, Q, R sont trois fonctions harmoniques qui vérifient l'égalité (6).

7. Le lemme démontré aux n^{os} **5** et **6** nous donne, en premier lieu, la solution de la question suivante :

De combien de manières différentes peut-on mettre trois fonctions données u, v, w sous la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

les trois fonctions P, Q, R *étant liées par la relation*

$$(6)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0?$$

Soit

$$(7\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial(\Phi+\Phi')}{\partial x} + \frac{\partial(R+R')}{\partial z} - \frac{\partial(Q+Q')}{\partial z},\\ v &= \frac{\partial(\Phi+\Phi')}{\partial y} + \frac{\partial(R+R')}{\partial z} - \frac{\partial(R+R')}{\partial x},\\ w &= \frac{\partial(\Phi+\Phi')}{\partial z} + \frac{\partial(Q+Q')}{\partial x} - \frac{\partial(P+P')}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

où

$$(6\ bis)\qquad \frac{\partial(P+P')}{\partial x} + \frac{\partial(Q+Q')}{\partial y} + \frac{\partial(R+R')}{\partial z} = 0,$$

une deuxième solution du problème. Évidemment, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les fonctions Φ', P', Q', R' vérifient les conditions

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial z},\\ 0 &= \frac{\partial\Phi'}{\partial y} + \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial x},\\ 0 &= \frac{\partial\Phi'}{\partial z} + \frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

avec

$$(21)\qquad \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} = 0.$$

D'après le lemme démontré au n° 5, pour qu'il existe une fonction Φ', vérifiant les égalités (20), lorsque l'égalité (21) est supposée vérifiée, il faut et il suffit que les trois fonctions P', Q', R' soient trois fonctions harmoniques; la fonction Φ' est déterminée par la connaissance des fonctions P', Q', R' à une quantité additive près, indépendante de x, y, z.

D'où la proposition suivante :

Ayant, d'une première manière, mis trois fonctions données u, v, w sous la forme (7), où les fonctions P, Q, R *vérifient l'égalité* (6), *et cherchant à les mettre d'une seconde manière sous la même forme, on peut, mais on peut seulement, ajouter respectivement aux trois fonctions* P, Q, R, *trois fonctions harmoniques qui vérifient aussi l'égalité* (6); *on doit, en même temps, ajouter à la fonction* Φ *une fonction harmonique déterminée à une quantité additive près, indépendante de x, y, z.*

8. *On peut, si l'on préfère, choisir arbitrairement la fonction harmonique Φ' que l'on veut ajouter à la fonction* Φ.

En effet, selon ce qui a été démontré au n° 6, quelle que soit cette fonction Φ', on peut trouver trois fonctions harmoniques ϖ, χ, ρ vérifiant l'égalité

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

et les égalités

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial y} = \frac{\partial \varpi}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varpi}{\partial y}.$$

Il suffira alors de prendre

$$P' = -\varpi, \qquad Q' = -\chi, \qquad R' = -\rho.$$

9. *Étant données trois fonctions* P, Q, R *qui vérifient l'éga-*

lité (6), *on peut trouver* [1] *trois autres fonctions* A, B, C, *telles que l'on ait*

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z},\\ Q &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x},\\ R &= \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En effet, d'après ce qui a été démontré au n° **2**, quelles que soient les fonctions P, Q, R, il existe quatre fonctions φ, p, q, r, telles que l'on ait

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z},\\ Q &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x},\\ R &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y};\\ \frac{\partial p}{\partial x} &+ \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour que les fonctions P, Q, R vérifient l'égalité (6), il faut et il suffit visiblement que la fonction φ soit harmonique; mais alors, selon ce qui a été démontré au n° **6**, on peut trouver trois fonctions p', q', r' vérifiant les égalités

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial r'}{\partial y} - \frac{\partial q'}{\partial z},\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\partial r'}{\partial x},\\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial y};\\ \frac{\partial p'}{\partial x} &+ \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

---

[1] Cette proposition a été démontrée par E. Betti (*Lehrbuch der Potentialtheorie*, p. 34[2]), en s'appuyant sur un lemme, dû à Jacobi, et tiré de la théorie du dernier multiplicateur.

La comparaison des égalités (24) et (25) montre que les fonctions

$$A = p - p',$$
$$B = q - q',$$
$$R = r - r'$$

vérifieront la proposition énoncée.

Réciproquement, il est clair que, *si l'on prend trois fonctions quelconques* A, B, C *et si l'on définit les fonctions* P, Q, R *par les égalités* (22), *ces fonctions* P, Q, R *vérifieront l'égalité* (6).

10. Les fonctions P, Q, R, qui vérifient l'égalité (6), étant données, supposons qu'on ait trouvé un système de fonctions A, B, C, qui vérifient les égalités (22) et (23); peut-on trouver un second système de fonctions

$$A + A', \qquad B + B', \qquad C + C'$$

qui vérifient les mêmes égalités?

Il faut et il suffit pour cela que les fonctions A′, B′, C′ vérifient les égalités

$$\frac{\partial C'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial A'}{\partial z} - \frac{\partial C'}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial B'}{\partial x} - \frac{\partial A'}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = 0.$$

D'après ce qui a été démontré aux n^{os} **5** et **6**, il faut et il suffit pour cela que les trois fonctions A′, B′, C′ soient les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique.

D'où la proposition suivante :

Ayant, d'une première manière, mis trois fonctions données P, Q, R *sous la forme* (22), *où les fonctions* A, B, C *vérifient la relation* (23), *et voulant les mettre d'une seconde manière sous la même*

forme, on peut, mais on peut seulement, ajouter aux trois fonctions A, B, C, *les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique.*

CHAPITRE II.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE CLEBSCH.

---

11. Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

vérifient les trois équations aux dérivées partielles simultanées que voici :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_0 u + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \\
&+ B_0 \Delta u + B_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta u}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \\
&+ B_{11} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\
&+ C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\
&+ C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \ldots + C_{\pi\rho\theta\ldots} \frac{\partial^{\varpi+\chi+\rho+\sigma}}{\partial x^\varpi \partial y^\chi \partial z^\rho \partial t^\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \ldots\ldots = 0, \\
&A_0 v + A_1 \frac{\partial v}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n v}{\partial t^n} \\
&+ B_0 \Delta v + B_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta v}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} \\
&+ B_{11} \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta v}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\
&+ C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \\
&+ C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \ldots + C_{\pi\rho\theta\ldots} \frac{\partial^{\varpi+\chi+\rho+\sigma}}{\partial x^\varpi \partial y^\chi \partial z^\rho \partial t^\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \ldots\ldots = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&A_0 w + A_1 \frac{\partial w}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \\
&+ B_0 \Delta w + B_1 \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta w}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \\
&+ B_{11} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta w}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\
&+ C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\
&+ C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \ldots + C_{ijk\ldots} \frac{\partial^{\tau+\chi+\rho+\sigma}}{\partial x^\tau \partial y^\chi \partial z^\rho \partial t^\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations, Θ a la signification donnée par l'égalité (1); les A, B, C sont des constantes.

En différentiant la première des équations (26) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutant membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons que Θ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&A_0 \Theta + A_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n \Theta}{\partial t^n} \\
&+ (B_0 + C_0) \Delta \Theta + (B_1 + C_1) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial x} + (B_2 + C_2) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial y} \\
&+ (B_3 + C_3) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial z} + (B_4 + C_4) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} + (B_{11} + C_{11}) \frac{\partial^2 \Delta \Theta}{\partial x^2} + \ldots \\
&+ (B_{ijk\ldots} + C_{ijk\ldots}) \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta \Theta}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous représenterons symboliquement le premier membre de cette équation par

$$\vartheta(\Theta),$$

et nous nommerons cette équation l'*équation aux dilatations*.

Différentions la troisième égalité (26) par rapport à y, la seconde par rapport à z et retranchons le second résultat du premier en tenant compte de la première égalité (2). Nous trouverons que Ω_x vérifie

l'équation aux dérivées partielles

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & A_0\Omega + A_1\frac{\partial\Omega}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Omega}{\partial t^n} \\ & + B_0\Delta\Omega + B_1\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial x} + B_2\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial y} + B_3\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial z} + B_4\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial t} \\ & + B_{11}\frac{\partial^2\Delta\Omega}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots}\frac{\partial^{p+q+r+s}\Delta\Omega}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} + \ldots\ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quantités Ω_y et Ω_z vérifient la même équation, que nous nommerons *équation aux rotations*. Nous représenterons symboliquement le premier membre de cette équation par

$$\mathcal{R}(\Omega).$$

12. Prenons trois fonctions quelconques u, v, w des variables x, y, z, t et mettons-les sous la forme (7), les fonctions P, Q, R n'étant pas nécessairement assujetties à vérifier la relation (6).

Substituons ces expressions de u, v, w dans les premiers membres des égalités (26); nous constatons aisément que ces premiers membres prennent la forme suivante :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}(R) - \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{R}(Q), \\ & \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{R}(P) - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{R}(R), \\ & \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{R}(Q) - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}(P). \end{aligned}\right.$$

Évidemment, ces trois quantités sont nulles si l'on a, en tout point de l'espace considéré,

$$\mathcal{D}(\Phi) = 0,$$

$$\mathcal{R}(P) = 0, \qquad \mathcal{R}(Q) = 0, \qquad \mathcal{R}(R) = 0.$$

D'où le théorème suivant :

Si Φ *désigne une intégrale quelconque de l'équation aux dilatations et* P, Q, R *trois intégrales quelconques de l'équation aux*

rotations, les expressions (7) *fournissent une intégrale du système* (26).

15. *Réciproquement, si*

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

est une intégrale du système (26), *on peut toujours trouver une intégrale* Φ *de l'équation aux dilatations et trois intégrales* P, Q, R *de l'équation aux rotations, ces dernières liées en outre par l'égalité* (6), *de telle manière que les égalités* (7) *se trouvent vérifiées par les sept fonctions*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Phi, \quad P, \quad Q, \quad R.$$

La démonstration de cette réciproque est le principal objet du présent écrit.

Comme nous l'avons vu au n° **5**, on pourra toujours trouver quatre fonctions Φ_0, P_0, Q_0, R_0, les trois dernières liées par l'égalité

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} = 0, \tag{30}$$

telles que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_0}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{\partial R_0}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Ces expressions, transportées dans les équations (26), doivent les vérifier identiquement, en sorte que nous avons les identités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}(\Phi_0)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(R_0)}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{R}(Q_0)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}(\Phi_0)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{R}(R_0)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}(\Phi_0)}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{R}(Q_0)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{R}(P_0)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Différentions la première de ces identités par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la nouvelle identité

$$\Delta\mathfrak{D}(\Phi_0) = 0.$$

Différentions la troisième identité (32) par rapport à y, la seconde par rapport à z, et retranchons membre à membre le premier résultat du second, en tenant compte de la relation (30); nous trouvons la première des identités

$$\Delta\mathfrak{R}(P_0) = 0, \qquad \Delta\mathfrak{R}(Q_0) = 0, \qquad \Delta\mathfrak{R}(R_0) = 0.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. En d'autres termes, on a

$$(33) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & \mathfrak{D}(\Phi_0) = \varphi, & \\ \mathfrak{R}(P_0) = p, & \mathfrak{R}(Q_0) = q, & \mathfrak{R}(R_0) = r, \end{array} \right.$$

φ, p, q, r étant quatre fonctions harmoniques.

L'égalité (30) entraîne visiblement l'égalité

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(P_0) + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(Q_0) + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(R_0) =$$

ou bien, en vertu des égalités (33),

$$(34) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Les identités (32) et (33) donnent

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial r}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Considérons l'équation

$$(36)\qquad A_0\Phi_1 + A_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Phi_1}{\partial t^n} + \varphi = 0.$$

Pour chaque système de valeurs de x, y, z, c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants; nous pouvons donc, à l'instant $t = 0$, prendre pour

$$\Phi_1,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{n-1}\Phi_1}{\partial t^{n-1}},$$

n fonctions arbitraires de x, y, z; prenons n fonctions harmoniques; nous aurons alors, pour $t = 0$,

$$(37)\qquad \Delta\Phi_1 = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi_1 = 0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta\Phi_1 = 0.$$

D'autre part, φ étant une fonction harmonique, l'égalité (36) donne, quel que soit t, l'égalité

$$A_0\Delta\Phi_1 + A_1\Delta\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \ldots + A_n\Delta\frac{\partial^n\Phi_1}{\partial t^n} = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$A_0\Delta\Phi_1 + A_1\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi_1 + \ldots + A_n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Delta\Phi_1 = 0.$$

Les égalités (37) étant vérifiées pour $t = 0$, l'équation précédente nous montre que l'on a, quel que soit t,

$$(38)\qquad \Delta\Phi_1 = 0.$$

On peut donc trouver une fonction Φ_1 qui vérifie à la fois les égalités (36) et (38). Dès lors, il est facile de voir que cette fonction harmonique Φ_1 vérifie l'équation

$$(39)\qquad \omega(\Phi_1) + \varphi = 0.$$

Prenons maintenant trois fonctions P_1, Q_1, R_1 vérifiant respective-

ment les équations

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &A_0 P_1 + A_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n P_1}{\partial t^n} + p = 0,\\ &A_0 Q_1 + A_1 \frac{\partial Q_1}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n Q_1}{\partial t^n} + q = 0,\\ &A_0 R_1 + A_1 \frac{\partial R_1}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n R_1}{\partial t^n} + r = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons prendre en outre, pour $t = 0$,

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &P_1 = \frac{\partial \chi_0}{\partial z} - \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial \chi_1}{\partial z} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} P_1}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial \chi_{n-1}}{\partial z} - \frac{\partial \rho_{n-1}}{\partial y},\\ &Q_1 = \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} Q_1}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial \rho_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_{n-1}}{\partial z},\\ &R_1 = \frac{\partial \varpi_0}{\partial y} - \frac{\partial \chi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial t} = \frac{\partial \varpi_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} R_1}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial \varpi_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{n-1}}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

$$\varpi_0, \quad \varpi_1, \quad \ldots, \quad \varpi_{n-1},$$

$$\chi_0, \quad \chi_1, \quad \ldots, \quad \chi_{n-1},$$

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1}$$

étant $3n$ fonctions harmoniques de x, y, z.

Ces égalités (41) entraînent les égalités suivantes, vraies également pour $t = 0$,

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta P_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta P_1 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta P_1 = 0,\\ &\Delta Q_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta Q_1 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta Q_1 = 0,\\ &\Delta R_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta R_1 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta R_1 = 0,\\ &\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right) = 0, \quad \ldots,\\ &\qquad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les fonctions p, q, r étant harmoniques et vérifiant

l'égalité (34), les égalités (40) donnent les égalités suivantes, vraies quel que soit t,

$$(43)\quad \begin{cases} A_0 \Delta P_1 + A_1 \dfrac{\partial}{\partial t} \Delta P_1 + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \Delta P_1 = 0, \\ A_0 \Delta Q_1 + A_1 \dfrac{\partial}{\partial t} \Delta Q_1 + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \Delta Q_1 = 0, \\ A_0 \Delta R_1 + A_1 \dfrac{\partial}{\partial t} \Delta R_1 + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \Delta R_1 = 0, \\ A_0 \left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z} \right) + A_1 \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z} \right) + \ldots \\ \qquad\qquad + A_n \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \right) = 0. \end{cases}$$

Les conditions (43), vraies quel que soit t, jointes aux conditions (42), vraies pour $t = 0$, montrent que l'on a, quel que soit t,

$$(44)\qquad \Delta P_1 = 0, \qquad \Delta Q_1 = 0, \qquad \Delta R_1 = 0,$$

$$(45)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} = 0.$$

La première équation (40) et la première condition (44) donnent sans peine la première des égalités

$$(46)\quad \begin{cases} \mathcal{R}(P_1) + p = 0, \\ \mathcal{R}(Q_1) + q = 0, \\ \mathcal{R}(R_1) + r = 0. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Posons

$$(47)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z}, \\ v' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial P_1}{\partial z} - \dfrac{\partial R_1}{\partial x}, \\ w' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} - \dfrac{\partial P_1}{\partial y}. \end{cases}$$

D'après les égalités (38), (44) et (45) et le lemme démontré au n° 4,

il existe une fonction harmonique Ψ :

$$\Delta\Psi = 0, \tag{48}$$

telle que l'on ait

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

ce qui donne identiquement, à la place des égalités (47),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Si, dans les égalités (26), on substitue à u, v, w, les quantités identiquement nulles qui forment les premiers membres des égalités (49), on doit obtenir trois identités. Si l'on tient compte de l'identité (48), ces identités deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\,\vartheta(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathcal{R}(R_1) - \frac{\partial}{\partial z}\,\mathcal{R}(Q_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\,\vartheta(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathcal{R}(P_1) - \frac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{R}(R_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z}\,\vartheta(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{R}(Q_1) - \frac{\partial}{\partial y}\,\mathcal{R}(P_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Les égalités (39), (46) et (35) transforment ces identités en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0.$$

En d'autres termes, il existe une fonction $f(t)$ telle que l'on ait

$$(51)\qquad A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n} = f(t).$$

Soit $F(t)$ une intégrale quelconque de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(52)\qquad A_0F(t) + A_1\frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n\frac{d^nF(t)}{dt^n} = f(t)$$

et posons

$$(53)\qquad \Psi - F(t) = -\Phi_2.$$

Les égalités (51) et (52) nous donneront l'égalité

$$A_0\Phi_2 + A_1\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Phi_2}{\partial t^n} = 0.$$

L'égalité (48) donnera l'égalité

$$\Delta\Phi_2 = 0$$

et ces deux dernières égalités donnent

$$(54)\qquad \Theta(\Phi_2) = 0.$$

Enfin, les identités (49) peuvent évidemment s'écrire

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z_1} = 0,\\ &\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 0.\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2,\\ P &= P_0 + P_1,\\ Q &= Q_0 + Q_1,\\ R &= R_0 + R_1.\end{aligned}$$

Nous aurons

$$\mathfrak{D}(\Phi) = \mathfrak{D}(\Phi_0) + \mathfrak{D}(\Phi_1) + \mathfrak{D}(\Phi_2)$$

ou bien, en vertu des égalités (33), (39) et (54),

$$\mathfrak{D}(\Phi) = 0. \tag{56}$$

Nous aurons aussi

$$\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}(P_0) + \mathfrak{R}(P_1),$$
$$\mathfrak{R}(Q) = \mathfrak{R}(Q_0) + \mathfrak{R}(Q_1),$$
$$\mathfrak{R}(R) = \mathfrak{R}(R_0) + \mathfrak{R}(R_1)$$

ou bien, en vertu des égalités (33) et (46),

$$\mathfrak{R}(P) = 0, \qquad \mathfrak{R}(Q) = 0, \qquad \mathfrak{R}(R) = 0. \tag{57}$$

Enfin, nous aurons

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}$$

ou bien, en vertu des égalités (30) et (45),

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{58}$$

Comme les égalités (31) et (55) permettent d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

on peut regarder le théorème énoncé comme démontré.

14. Cherchons maintenant de combien de manières différentes on peut mettre une même intégrale u, v, w des équations (26), sous la

forme (7), Φ étant une intégrale de l'équation aux dilatations et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations, liées en outre par l'égalité (6).

Si Φ, P, Q, R constituent une première détermination des quatre fonctions dont il s'agit, pour que $(\Phi+\Phi')$, $(P+P')$, $(Q+Q')$, $(R+R')$ en soient une seconde détermination, il faut et il suffit :

1° Que Φ' soit une intégrale de l'équation aux dilatations;

2° Que P', Q', R' soient trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par la relation

$$\frac{\partial P'}{\partial x}+\frac{\partial Q'}{\partial y}+\frac{\partial R'}{\partial z}=0; \tag{60}$$

3° Que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi'}{\partial x}+\frac{\partial R'}{\partial y}-\frac{\partial Q'}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial\Phi'}{\partial y}+\frac{\partial P'}{\partial z}-\frac{\partial R'}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial\Phi'}{\partial z}+\frac{\partial Q'}{\partial x}-\frac{\partial P'}{\partial y}=0.\end{aligned}\right. \tag{61}$$

Les égalités (60) et (61) exigent, comme nous l'avons vu au n° 4, que les quatre fonctions Φ', P', Q', R' soient quatre fonctions harmoniques; dès lors, au lieu d'exprimer que la première vérifie l'équation aux dilatations et les trois dernières l'équation aux rotations, il revient au même de dire que ces quatre fonctions vérifient les équations

$$A_0\Phi'+A_1\frac{\partial\Phi'}{\partial t}+A_2\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t^2}+\ldots+A_n\frac{\partial^n\Phi'}{\partial t^n}=0, \tag{62}$$

$$\left\{\begin{aligned}&A_0P'+A_1\frac{\partial P'}{\partial t}+A_2\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}+\ldots+A_n\frac{\partial^nP'}{\partial t^n}=0,\\&A_0Q'+A_1\frac{\partial Q'}{\partial t}+A_2\frac{\partial^2Q'}{\partial t^2}+\ldots+A_n\frac{\partial^nQ'}{\partial t^n}=0,\\&A_0R'+A_1\frac{\partial R'}{\partial t}+A_2\frac{\partial^2R'}{\partial t^2}+\ldots+A_n\frac{\partial^nR'}{\partial t^n}=0.\end{aligned}\right. \tag{63}$$

Prenons trois fonctions harmoniques P', Q', R', qui vérifient les égalités (60) et (63); nous avons vu au numéro précédent comment on pouvait constituer de semblables fonctions; d'après ce que nous

avons vu au n° 5, il existe une fonction harmonique V, déterminée à une fonction près de t, telle que l'on ait

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenons une de ces fonctions V. Des égalités (63) et (64) nous tirons sans peine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0$$

ou bien

$$(65)\qquad A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n} = f(t).$$

D'autre part, la comparaison des égalités (61) et (64) donne

$$\Phi = V + F(t),$$

tandis que les égalités (62) et (65) donnent

$$(66)\qquad A_0 F(t) + A_1 \frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n F(t)}{dt^n} = f(t).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Une intégrale u, v, w des équations (26) a été mise sous la forme (7), où Φ est une intégrale de l'équation aux dilatations et où P, Q, R sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par l'égalité (6). Si l'on veut, d'une seconde manière, mettre cette intégrale sous cette même forme, on peut, mais on peut seulement,

ajouter aux fonctions P, Q, R *trois fonctions harmoniques* P', Q', R' *vérifiant les égalités* (61) *et* (63). *On a alors à ajouter à la fonction* Φ *une fonction* Φ' *déterminée à une fonction près de* t, *intégrale de l'équation*

$$A_0 F(t) + A_1 \frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n F(t)}{dt^n} = 0.$$

15. *On peut, si l'on préfère, choisir, pour l'ajouter à la fonction* Φ, *une quelconque des fonctions harmoniques* Φ' *qui intègrent l'équation* (62).

Appliquons, en effet, à cette fonction Φ' la méthode de M. Carl Neumann. La fonction $\Phi'(x, y, z, t)$ intégrant l'équation (66), il en sera, en particulier, de même de la fonction $\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)$; dès lors, il en sera de même de la fonction $U(x, y, z, t)$, liée à $\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)$ comme, d'après la première égalité (14), $U(x, y, z)$ est lié à $V(\xi, \eta, \zeta)$; la fonction $U(\xi, \eta, \zeta, t)$ intégrera donc l'équation (66); en continuant ainsi de proche en proche, on trouvera que toutes les fonctions

$$U^{(p)}(\xi, \eta, \zeta, t)$$

vérifient l'équation

$$A_0 U^{(p)}(\xi, \eta, \zeta, t) + A_1 \frac{\partial U^{(p)}(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n U^{(p)}(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^n} = 0.$$

D'autre part, la méthode de M. Carl Neumann montre sans peine que, quel que soit l'indice p, la série

$$\left[\frac{\partial^p \Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p U(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p}\right] + \left[\frac{\partial^p U'(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p U''(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p}\right] + \ldots$$

est uniformément convergente sur la surface S.

Dès lors, la série

$$[\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t) - U(\xi, \eta, \zeta, t)] + [U'(\xi, \eta, \zeta, t) - U''(\xi, \eta, \xi, t)] + \ldots$$

converge uniformément sur la surface S et y définit une fonction $\sigma(\xi, \eta, \zeta, t)$ qui vérifie l'équation

$$A_0 \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) + A_1 \frac{\partial \sigma(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n \sigma(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^n} = 0.$$

Cela posé, il suffira de joindre à la fonction Φ les déterminations suivantes de P, Q, R,

$$P(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, z) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, y) \right] dS,$$

$$Q(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, x) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, z) \right] dS,$$

$$R(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, y) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, x) \right] dS,$$

car ces déterminations vérifient les conditions (60), (61), (63).

16. On peut donner une autre forme générale de l'intégrale des équations (26).

Soient u, v, w trois fonctions qui intègrent ces équations. Nous savons que nous pouvons les mettre sous la forme (7), Φ étant une intégrale de l'équation aux dilatations

$$(67) \qquad \mathcal{D}(\Phi) = 0$$

et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations

$$(68) \qquad \mathcal{R}(P) = 0, \qquad \mathcal{R}(Q) = 0, \qquad \mathcal{R}(R) = 0,$$

liées par la condition (6).

La condition (6), jointe à la proposition démontrée au n° 9, nous enseigne qu'il existe trois fonctions A, B, C telles que l'on puisse

écrire

$$(22)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{\partial C}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial z}, \\ Q = \dfrac{\partial A}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial x}, \\ R = \dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(23)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Substituons dans les égalités (68) les expressions (22) des fonctions P, Q, R. Nous trouvons les trois égalités que voici :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(C)}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}(B)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(A)}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}(C)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(B)}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}(A)}{\partial y} = 0.$$

Ces égalités équivalent à la proposition suivante :

Il existe une fonction $f(x, y, z, t)$ telle que l'on puisse écrire

$$(69)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}(A) = \dfrac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}, \\ \mathfrak{R}(B) = \dfrac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y}, \\ \mathfrak{R}(C) = \dfrac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités nous donnent

$$\Delta f(x, y, z, t) = \mathfrak{R}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

ou bien, en vertu de l'égalité (23),

$$(70)\qquad \Delta f = 0.$$

La fonction f est donc harmonique.

Considérons l'équation

$$(71)\qquad A_0 F + A_1 \frac{\partial F}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} + f = 0$$

et prenons, pour $t = 0$,

$$\Delta F = 0, \qquad \Delta \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} = 0.$$

Nous aurons alors, quel que soit t,

$$(72)\qquad \Delta F = 0$$

et la comparaison des égalités (71) et (72) nous donnera l'égalité

$$\mathcal{A}(F) + f = 0,$$

d'où découlent les suivantes :

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\\ &\mathcal{A}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\\ &\mathcal{A}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= A + \frac{\partial F}{\partial x},\\ \beta &= B + \frac{\partial F}{\partial y},\\ \gamma &= C + \frac{\partial F}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

la comparaison des égalités (69) et (73) nous donnera

$$(75)\qquad \mathcal{A}(\alpha) = 0, \qquad \mathcal{A}(\beta) = 0, \qquad \mathcal{A}(\gamma) = 0.$$

La comparaison des égalités (23), (72) et (74) nous donne, d'ailleurs,

$$(76)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

tandis que la comparaison des égalités (22) et (74) nous donne

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z},\\ Q &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ R &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Une intégrale quelconque u, v, w des équations (26) *peut se mettre sous la forme*

$$(78)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right),\\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right),\\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right), \end{aligned}\right.$$

où Φ est une intégrale de l'équation aux dilatations et où α, β, γ sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par l'égalité (76).

Réciproquement, si, dans les égalités (78), *on substitue à Φ une intégrale quelconque de l'équation aux dilatations et à α, β, γ trois intégrales quelconques de l'équation aux rotations, on obtient visiblement une intégrale des équations* (26).

Remarque. — En vertu de l'égalité (76), les égalités (78) peuvent également s'écrire

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Delta\alpha,\\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Delta\beta,\\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \Delta\gamma. \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE III.

FLUX LONGITUDINAL ET FLUX TRANSVERSAL.

---

17. Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \qquad v(x, y, z, t), \qquad w(x, y, z, t)$$

intègrent les équations (26). Nous pourrons regarder ces trois fonctions comme les trois composantes d'un certain vecteur, variable d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre.

Mettons ces trois fonctions, selon ce que nous enseigne le Chapitre précédent, sous la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

où Φ est une intégrale de l'équation aux dilatations et où P, Q, R sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Ce vecteur, que nous nommerons le *flux total*, peut se former par composition de deux autres, dont l'un a pour composantes

$$(80) \qquad u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

tandis que l'autre a pour composantes

$$(81)\quad \begin{cases} u'' = \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v'' = \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w'' = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$

Étudions quelques propriétés de ces flux.

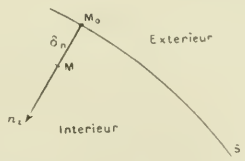
Le premier, donné par les égalités (80), dépend de l'équation aux dilatations

$$\Theta(\Phi) = 0.$$

Supposons que cette équation soit du second ordre et appartienne à la catégorie d'équations aux dérivées partielles dont l'équation du son est le type; qu'elle admette des intégrales continues dans tout l'espace, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, mais pouvant présenter, de part et d'autre d'une surface variable avec le temps, deux déterminations analytiques différentes.

Imaginons, par exemple, que S (*fig.* 1) soit, à l'instant t, une sem-

Fig. 1.



blable surface. Elle divise l'espace en deux régions; en l'une de ces régions, que nous nommerons l'*extérieur*, la fonction Φ est identiquement nulle; en l'autre région, que nous nommerons l'*intérieur*, la fonction Φ admet une détermination analytique différente de 0. S est le *front de l'onde*.

La fonction Φ devant être continue ainsi que ses dérivées partielles

du premier ordre, on aura, sur le front de l'onde,

$$(82)\qquad \begin{cases} \Phi = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Le flux, identiquement nul à l'extérieur et sur le front de l'onde, est infiniment petit en un point intérieur infiniment voisin du front de l'onde. Nous allons calculer ses composantes en un tel point.

Soient $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la surface S et $M(x, y, z)$ un point intérieur et infiniment voisin du point M_0. Posons

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y, \qquad z = z_0 + \delta z.$$

Les égalités (82) étant vérifiées au point M_0, si l'on pose

$$\Phi_0 = \Phi(x_0, y_0, z_0, t), \qquad \Phi = \Phi(x, y, z, t),$$

on aura

$$(83)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\delta x + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial x_0}\delta y + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\delta z.$$

Supposons que le point M se trouve, comme le point M_0, sur la surface S; la direction M_0M sera celle d'une tangente θ en M_0 à la surface S, en sorte que l'on aura

$$\delta x = \overline{M_0M}\cos(\theta, x), \qquad \delta y = \overline{M_0M}\cos(\theta, y), \qquad \delta z = \overline{M_0M}\cos(\theta, z).$$

D'autre part, en vertu des égalités (82), on aura, au point M,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0.$$

L'égalité (83) deviendra donc la première des égalités

$$(84)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial x_0}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0^2}\cos(\theta, z) = 0. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités sont vraies, quelle que soit la tangente θ menée par le point M_0 à la surface S.

Par le point M_0, menons une demi-normale n_i vers l'*intérieur*; prenons le point M sur cette demi-normale à une distance $\overline{MM_0} = \delta n$ du point M_0; nous aurons alors

$$\delta x = \delta n \cos(n_i, x), \qquad \delta y = \delta n \cos(n_i, y), \qquad \delta z = \delta n \cos(n_i, z).$$

Calculons les valeurs de u', v', w' au point M. En vertu des égalités (80) et (83), nous aurons

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} u' &= \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_0 \partial x_0}\cos(n_i, y) - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0 \partial x_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n,\\ v' &= \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0 \partial y_0}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_0^2}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0 \partial y_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n,\\ w' &= \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0 \partial z_0}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_0 \partial z_0}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0^2}\cos(n_i, z)\right]\delta n. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les deux membres des équations (85) par $\cos(\theta, x)$, $\cos(\theta, y)$, $\cos(\theta, z)$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (84); nous trouvons l'égalité

$$u'\cos(\theta, x) + v'\cos(\theta, y) + w'\cos(\theta, z) = 0,$$

qui équivaut à la proposition suivante :

En un point intérieur et infiniment voisin du front de l'onde, le flux représenté par les équations (80) *est infiniment petit et dirigé suivant la normale au front de l'onde.*

Il est aisé de trouver la grandeur de ce flux, qui est

$$(86)\qquad N = u'\cos(n_i, x) + v'\cos(n_i, y) + w'\cos(n_i, z).$$

Par le point M_0 menons à la surface S deux tangentes θ, θ', rectan-

gulaires entre elles. Nous aurons

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos^2(n_i, x) + \cos^2(\theta, x) + \cos^2(\theta', x) = 1,\\ &\cos(n_i, y)\cos(n_i, x) + \cos(\theta, y)\cos(\theta, x) + \cos(\theta', y)\cos(\theta', x) = 0,\\ &\cos(n_i, z)\cos(n_i, x) + \cos(\theta, z)\cos(\theta, x) + \cos(\theta', z)\cos(\theta', x) = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (78) et (79), nous pouvons écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n = u',\\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta, x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta, y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta, z) = 0,\\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta', x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta', y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta', z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les deux membres de ces égalités par $\cos(n_i, x)$, $\delta n\cos(\theta, x)$, $\delta n\cos(\theta', x)$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (87); nous trouvons la première des égalités

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\delta n = u'\cos(n_i, x),\\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0^2}\delta n = v'\cos(n_i, y),\\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0^2}\delta n = w'\cos(n_i, z). \end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Ajoutons membre à membre les égalités (88), en tenant compte de l'égalité (86), et nous trouvons

$$(89)\qquad N = \Delta\Phi_0\,\delta n.$$

La proposition précédemment démontrée est la raison pour laquelle le flux représenté par les relations (80) se nomme, *en toutes circonstances*, le *flux longitudinal*.

18. Occupons-nous maintenant du vecteur représenté par les équations (81); les trois fonctions P, Q, R, qui servent à déterminer ce vecteur, sont trois intégrales de l'équation aux rotations

$$\mathcal{R}(\Omega) = 0.$$

Imaginons que cette équation soit du second ordre et qu'elle puisse admettre pour intégrales des fonctions qui soient continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, mais qui admettent, de part et d'autre d'une surface, des expressions analytiques différentes.

Soit, à l'instant t, S le *front de l'onde*. A l'*extérieur*, les trois fonctions P, Q, R sont identiquement nulles; elles sont différentes de 0 à l'intérieur.

En tout point de la surface S, la continuité de la fonction P et de ses dérivées partielles du premier ordre exige que l'on ait

$$(90)\qquad \begin{cases} P = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial P}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Si M_0 est un point de la surface S, si θ, θ' sont deux tangentes rectangulaires issues de ce point, on aura, en vertu de la troisième équation (90),

$$(91)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial x_0 \partial y_0}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial z_0 \partial y_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial x_0 \partial y_0}\cos(\theta', x) + \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta', y) + \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial z_0 \partial y_0}\cos(\theta', z) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, soient n_i la demi-normale intérieure menée par le point M_0 et $M(x, y, z)$ un point de cette demi-normale à une distance δn du point M_0. Nous aurons

$$(92)\qquad \left[\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_0 \partial y_0}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z_0 \partial y_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Multiplions respectivement les deux membres des égalités (91) et (92) par $\cos(\theta, z)\,\delta n$, $\cos(\theta', z)\,\delta n$, $\cos(n_i, z)$ et ajoutons membre

à membre les égalités obtenues, en tenant compte des égalités (87); nous trouvons la première des égalités

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial y}\cos(n_i, z) = \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\,\delta n, && \frac{\partial P}{\partial z}\cos(n_i, y) = \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\,\delta n,\\ &\frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n_i, x) = \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\,\delta n, && \frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n_i, z) = \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\,\delta n,\\ &\frac{\partial R}{\partial x}\cos(n_i, y) = \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\,\delta n, && \frac{\partial R}{\partial y}\cos(n_i, x) = \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\,\delta n. \end{aligned}\right.$$

Les cinq autres s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (81) et (93) donnent immédiatement

$$u'\cos(n_i, x) + v'\cos(n_i, y) + w'\cos(n_i, z) = 0.$$

D'où le proposition suivante :

En un point intérieur à l'onde et infiniment voisin du front de l'onde, le flux représenté par les égalités (81) *est infiniment petit et parallèle au plan tangent à l'onde.*

C'est pour rappeler cette propriété que l'on donne, *d'une manière générale*, au flux représenté par les égalités (81), le nom de *flux transversal*.

Le théorème démontré aux n^os^ **11** et **12** peut alors s'énoncer ainsi :

Le flux total qui vérifie les égalités (26) *s'obtient de la manière la plus générale en composant un flux longitudinal qui dépend de l'équation aux dilatations et un flux transversal qui dépend de l'équation aux rotations.*

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS AUXQUELLES S'APPLIQUENT LES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES.

19. Parmi les équations auxquelles s'appliquent les considérations précédentes, nous citerons, en premier lieu, les équations des petits mouvements des solides isotropes. Avec les notations de Lamé, ces équations s'écrivent

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\\ &\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu\Delta v - (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,\\ &\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu\Delta w - (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

Elles sont de la forme (26).

L'équation aux dilatations est

$$\rho\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\Delta\Theta = 0.$$

L'équation aux rotations est

$$\rho\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - \mu\Delta\Omega = 0.$$

Les conditions de stabilité donnant les deux inégalités

$$\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0,$$

ces deux équations sont de la forme de l'*équation du son* :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi = 0.$$

Ce cas est celui que Clebsch a considéré.

20. Les équations (94) renferment comme cas particulier les équations

$$(95)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\\ &\mu\Delta v + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,\\ &\mu\Delta w + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right.$$

qui sont les équations de l'équilibre d'élasticité pour un solide isotrope soumis à des forces exclusivement appliquées à sa surface. L'équation aux dilatations et l'équation aux rotations sont

$$\Delta\Theta = 0, \qquad \Delta\Omega = 0.$$

Ce sont des *équations de Laplace*.

Ainsi, *lorsqu'un solide isotrope est soumis à des forces appliquées exclusivement à la surface qui le termine, les composantes du déplacement peuvent être mises sous la forme donnée par les égalités* (6) *et* (7), Φ, P, Q, R *étant quatre fonctions harmoniques.*

21. Nous citerons, en second lieu, les équations des petits mouvements adiabatiques des fluides compressibles et visqueux.

Si l'on désigne par

ρ la densité du fluide,
Π la pression,
u, v, w les composantes de la vitesse,
μ et ν deux constantes,

les équations des mouvements finis des fluides compressibles et visqueux sont les équations

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \mu\Delta u - \nu\frac{\partial\theta}{\partial x},\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \mu\Delta v - \nu\frac{\partial\theta}{\partial y},\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \mu\Delta w - \nu\frac{\partial\theta}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre l'équation de continuité

$$(97)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\Theta + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0.$$

Si le fluide est animé d'un mouvement très petit au voisinage d'une position d'équilibre où ρ_0 et T_0 sont sa densité et sa température uniformes, les équations précédentes deviendront, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(98)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u - \nu\frac{\partial\Theta}{\partial x},\\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} - \mu\Delta u - \nu\frac{\partial\Theta}{\partial y},\\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} - \mu\Delta w - \nu\frac{\partial\Theta}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

$$(99)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\Theta = 0.$$

Si les petits mouvements en question sont supposés adiabatiques, aux équations précédentes, il faut joindre la loi de détente adiabatique

$$(100)\qquad \Pi = f(\rho, \rho_0, T_0) = F(\rho).$$

Moyennant l'équation (100), l'équation (99) devient

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = -\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\Theta,$$

d'où

$$(101)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial t} &= -\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial t} &= -\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial y},\\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial t} &= -\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (98) par rapport à t, en tenant compte

des équations (101), et nous trouvons les équations

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations (102) sont du type (26).

L'équation aux dilatations est

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\Delta\Theta - (\mu+\nu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta = 0.$$

L'équation aux rotations est

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \mu\Delta\Omega\right) = 0.$$

D'ailleurs les équations (98) nous montrent immédiatement que les rotations vérifient l'équation

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \mu\Delta\Omega = 0,$$

qui est l'*équation de la conductibilité de la chaleur*.

22. On obtient un type beaucoup plus général d'équations auxquelles s'appliquent les considérations précédentes en traitant le problème de la propagation des actions électriques dans un milieu homogène qui est à la fois conducteur et diélectrique.

Si l'on désigne par

ε la constante des lois de Coulomb,
a^2 la constante des actions électromagnétiques,
h la constante de Helmholtz,
ρ la résistance électrique spécifique du milieu,
F son coefficient de polarisation diélectrique,
f son coefficient d'aimantation,

les théories de Helmholtz montrent que les composantes X, Y, Z du champ électrique vérifient les équations :

$$
(103)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta X \\
&- \frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial t} = 0, \\
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta Y \\
&- \frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial t} = 0, \\
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta Z \\
&- \frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial t} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations sont du type (26).

L'équation aux dilatations, que vérifie également la fonction potentielle électrostatique V, est la suivante

$$(1+4\pi\varepsilon F)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta - 4\pi a^2 k F\frac{\partial^3\Theta}{\partial t^3} - \frac{4\pi}{\rho}\left(\varepsilon\Delta\Theta - a^2 k\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}\right) = 0.$$

L'équation aux rotations est

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Omega - 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3\Omega}{\partial t^3} - \frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = 0.$$

Mais on montre directement que les trois rotations et les trois composantes L, M, N du champ magnétique vérifient l'équation

$$\Delta\Omega - 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - \frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0,$$

qui est l'*équation des télégraphistes généralisée*, objet d'une Note de M. Boussinesq [1].

---

[1] *Voir* un Article de M. Blondin dans la *Lumière électrique* du 3 mars 1894.

23. Si l'on suppose que le milieu ne soit pas diélectrique,

$$F = 0,$$

les équations (103) deviennent

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta X \\ &- \frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1+4\pi f-k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} = 0, \\ &\text{et deux analogues.} \end{aligned}\right.$$

Ces équations, qui régissent la propagation de l'électricité dans un milieu conducteur non diélectrique, se ramènent aux équations (102) des petits mouvements adiabatiques des fluides visqueux, si l'on remplace

$$\begin{array}{lcl} X, Y, Z & \text{par} & u, v, w, \\ \dfrac{\rho}{4\pi a^2(1+4\pi f)} & \text{par} & \mu, \\ \dfrac{(1+4\pi f-k)\rho}{4\pi a^2 k(1+4\pi f)} & \text{par} & \nu, \\ \dfrac{\varepsilon}{a^2 k} & \text{par} & \dfrac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}. \end{array}$$

Cette remarque a été faite par Helmholtz.

24. Si l'on suppose que le milieu ne soit pas conducteur,

$$\rho = \infty,$$

les équations (103) deviennent

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right. \\ &\qquad \left. - \Delta X - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] = 0, \\ &\text{et deux analogues.} \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, dans ce cas, on montre directement que X, Y, Z vérifient

les équations

$$
(106)\quad \left\{
\begin{aligned}
&4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \Delta X - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0,\\
&4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \Delta Y - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0,\\
&4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \Delta Z - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations, qui régissent la propagation des actions électriques dans les corps diélectriques isolants, se ramènent aux équations (94) des petits mouvements des corps élastiques isotropes, si l'on remplace

$$
\begin{array}{lcl}
X, Y, Z & \text{par} & u, v, w,\\[2ex]
\dfrac{1}{4\pi a^2 F(1+4\pi f)} & \text{par} & \dfrac{\mu}{\rho},\\[2ex]
\dfrac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{4\pi a^2 k F(1+4\pi f)} & \text{par} & \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}.
\end{array}
$$

On voit que le théorème de Clebsch, généralisé comme nous l'avons indiqué dans cet écrit, trouve son emploi dans les questions les plus variées de la Physique mathématique.

Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0,$$

une équation algébrique à deux variables et à coefficients entiers, où $\varphi_i(x, y)$ est l'ensemble des termes de degré i de $F(x, y)$.

Quand on cherche à résoudre en nombres entiers réels les équations de la forme (1), on peut les diviser en deux grandes classes : 1° celles qui ont un nombre limité de solutions; 2° celles qui en ont une infinité. On connaît des exemples d'équations des deux classes, par exemple [1], dans le cas où $n = 2$. Quand $n > 2$, l'équation (1) n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers, si elle représente en coordonnées cartésiennes une courbe dont toutes les asymptotes sont imaginaires, ou pour laquelle l'équation $\varphi_n(1, c) = 0$ est de degré n en c, et n'a que des racines imaginaires; dans d'autres cas, au contraire, elle aura une infinité de solutions : ceci a lieu, par

[1] *Voir*, par exemple, les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet et Dedekind, 3e édition, p. 128-283; 1879.

exemple, si

$$F(x, y) = (\alpha\beta' y - \beta\alpha' x)^p - (\beta\gamma' x - \gamma\beta' y)^q (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^{p-q} = 0,$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ étant des entiers satisfaisant à certaines conditions [1].

Lagrange [2] a appliqué les propriétés du développement des racines des équations en fractions continues à l'étude du cas où

$$F = \varphi_n(x, y) + \varphi_0.$$

Supposons ici que, dans (1), $F(x, y)$ soit arithmétiquement irréductible, c'est-à-dire ne soit divisible par aucun polynome de degré plus petit. Nous allons démontrer l'existence de nouvelles catégories d'équations (1) n'admettant qu'un nombre limité de solutions quand $n > 1$. Nous indiquerons également une extension aux équations indéterminées à trois variables.

II.

Admettons que (1) ait une infinité de solutions : on pourra toujours trouver une solution

$$(2) \qquad x = p, \qquad y = q,$$

telle que l'un au moins de ces deux nombres p, par exemple, soit aussi grand qu'on veut, avec $p > q$.

Le point (2), en coordonnées cartésiennes, est sur la courbe $F = 0$, et, par suite, sur une des branches infinies réelles, c'est-à-dire au voisinage d'une asymptote réelle de $F = 0$. Il y aura une infinité de solutions (2) situées sur une de ces branches au moins. Considérons le cas où l'asymptote de cette branche a son coefficient angulaire c, fini.

---

(1) *Voir* notre Note des *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, p. 182-213; 1895. Nous y déterminons, en particulier, les équations indéterminées à deux variables qui ont une infinité de solutions entières x, y données par *tous* les termes de deux suites récurrentes du second ordre et de même loi, l'une pour les x, l'autre pour les y.

(2) *Œuvres complètes*, t. II, p. 662 et suiv.; 1868. Gauthier-Villars.

c_1 étant racine simple de

$$\varphi_n(1, c) = 0, \tag{3}$$

et n'est pas parallèle aux axes, et prenons des solutions situées exclusivement sur cette branche.

Posant alors

$$q = (c_1 + \varepsilon)p = c_1 p + \delta, \tag{4}$$

δ tendant vers une limite finie quand le point (2) s'éloigne à l'infini sur la branche infinie considérée [1], nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_i(p, q) &= \varphi_i(p, c_1 p + \delta) = \varphi_i(p, c_1 p) + \frac{\delta}{1}\varphi_i'(p, c_1 p) + A\delta^2 \\ &= p^i \varphi_i(1, c_1) + \frac{\delta}{1} p^{i-1}\varphi_i'(1, c_1) + A\delta^2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

φ_i', φ_i'', ... étant les dérivées de φ_i par rapport à y. (1) devient, puisque $\varphi_n(1, c_1) = 0$,

$$p^{n-1}[\delta\varphi_n'(1, c_1) + \varphi_{n-1}(1, c_1)] + Bp^{n-2}, \tag{6}$$

B restant limité quand le point (2) s'éloigne à l'infini sur la branche infinie considérée, et δ tendant vers la valeur d racine de

$$d\varphi_n'(1, c_1) + \varphi_{n-1}(1, c_1) = 0; \tag{7}$$

d est bien fini, puisque $\varphi_n'(1, c_1) \neq 0$, (3) n'ayant pas c_1 pour racine double. Alors ε et $\delta - d$ sont aussi petits qu'on veut quand p est assez grand.

Ceci posé, soient

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda \tag{8}$$

les racines finies de (3); on aura

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_n(x, y) &= a_k(y - c_1 x)\ldots(y - c_\lambda x)x^{n-\lambda}, \\ \varphi_n(1, c) &= a_k(c - c_1)\ldots(c - c_\lambda); \end{aligned}\right. \tag{9}$$

[1] Comparez, par exemple, PRUVOST, *Géométrie analytique*, t. I, p. 307; 1888.

admettons que $\varphi_n(1, c)$, *considéré comme polynome de degré n en c*, ne soit pas irréductible, c'est-à-dire possède un diviseur rationnel à coefficients entiers de degré $< n$, ce qui a toujours lieu quand $\lambda < n$; on aura

$$(10)\qquad \begin{cases} \varphi_n(x, y) = \psi_k(x, y)\,\psi_{n-k}(x, y), \\ \varphi_n(1, c) = \psi_k(1, c)\,\psi_{n-k}(1, c), \end{cases}$$

$\psi_k(1, c)$ et $\psi_{n-k}(1, c)$ étant deux polynomes à coefficients entiers, dont le premier, de degré k, est irréductible et a c_1 pour racine, et dont le deuxième est de degré $n - k$.

La droite $y = c_1 x$ coupe la courbe $F = 0$ en un nombre fini de points; si x_1 est la plus grande des abscisses finies de ces points d'intersection, et si l'on prend dans (2)

$$(11)\qquad p > x_1,$$

on aura

$$(12)\qquad \begin{cases} \psi_k(p, q) = \theta p^{\mu-1}, \\ \psi_{n-k}(p, q) = a_k(q - c_{k+1}p)\ldots(q - c_\lambda p)\,p^{n-\lambda} = \eta_1 p^{\lambda-k}, \end{cases}$$

puisque $\psi_k(p, q)$ est entier; θ et η_1 restent finis quand p croît indéfiniment, car, par exemple,

$$q - c_{k+1}p = q - c_1 p + (c_1 - c_{k+1})p,$$

$c_1 - c_{k+1}$ étant fini, et $q - c_1 p$ différant de d d'une quantité qui tend vers o quand p croît indéfiniment. On en conclut

$$(13)\qquad \varphi_n(p, q) = \theta\eta_1 p^{n-k+\mu}.$$

Alors

$$F(p, q) - \varphi_n(p, q) = -\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_0,$$

et le dernier membre doit être, quand p est très grand, sur la branche

infinie considérée, au moins de l'ordre p^{n-k}. Ceci apparaît maintenant impossible quand on a [1]

$$(14) \qquad \varphi_{n-1}(1, c_1) = \varphi_{n-2}(1, c_1) = \ldots = \varphi_{n-k}(1, c_1) = 0.$$

Nous en concluons ce théorème :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$(1) \qquad F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique de degré n à coefficients entiers, F étant arithmétiquement irréductible, sans que $\varphi_n(x, y)$ le soit, et φ_i étant l'ensemble des termes de degré i de F.

Si c_1 est une racine simple réelle de l'équation $\varphi_n(1, c) = 0$ de degré λ, $\psi_k(1, c)$ un facteur irréductible de degré $k < n$ de $\varphi_n(1, c)$, qu'on suppose exister et qui admette la racine c_1, l'équation indéterminée (1) ne peut avoir sur la branche infinie dont l'asymptote a pour coefficient angulaire c_1 un nombre infini de solutions en nombres entiers que si l'une des quantités

$$\varphi_{n-1}(1, c_1), \quad \varphi_{n-2}(1, c_1), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-k}(1, c_1)$$

est différente de 0.

Nous nous contenterons de signaler qu'on pourrait établir un théorème semblable dans le cas où $\varphi_n(1, c) = 0$ admet c_1 pour racine multiple.

Examinons maintenant le cas où une branche infinie de la courbe (1) a une asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées et à distance finie, par exemple à l'axe Oy.

Soit $x = d$ cette asymptote; elle coupe la courbe en un nombre fini de points; l'abcisse x d'un point situé sur la branche finie, quand y

---

[1] Dans ce cas, en effet, $\varphi_{n-i}(1, c)$, par exemple, $(1 \leq i \leq k)$ est de la forme $\psi_k(1, c)\psi_{n-k-i}(1, c)$, et $\varphi_{n-i}(p, q)$ est d'ordre $\leq p^{n-k-i+\mu} <$ celui de $\varphi_n(p, q)$.

est assez grand, diffère de d d'aussi peu qu'on veut, et, par suite, ne peut être entière, que d soit entier ou non. Donc :

Le long d'une branche infinie dont l'asymptote est parallèle à l'un des axes de coordonnées et à distance finie, l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

On en conclut :

Corollaire. — Tout étant posé comme au théorème I, si les racines réelles $\neq 0$ de $\varphi_n(1, c) = 0$ sont toutes simples, si, de plus, les asymptotes parallèles aux axes sont toutes à distance finie, soit k le degré maximum d'un facteur irréductible de $\varphi_n(1, c)$, avec $k < n$, si les polynomes

$$\varphi_{n-1}(1, c), \quad \varphi_{n-2}(1, c), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-k}(1, c)$$

sont divisibles par $\varphi_n(1, c)$ ou identiquement nuls, l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

Nous croyons devoir signaler comme particulièrement intéressants les cas où $k = 1$ ou 2. Si $k = 1$, il suffit que $\varphi_{n-1}(x, y) = 0$ identiquement pour que ce corollaire soit applicable, si $k = 2$, il suffit que $\varphi_{n-1}(x, y) = \varphi_{n-2}(x, y) = 0$ identiquement. Mais nous allons voir qu'on peut alors aller plus loin.

1° $k = 1$. Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème II. — *Il n'existe aucune équation indéterminée irréductible* $F(x, y) = 0$ *à coefficients entiers ayant une infinité de solutions en nombres entiers sur une branche infinie de la courbe* $F = 0$ *telle que le coefficient angulaire de l'asymptote soit rationnel et* $\neq 0$, *si ce coefficient est racine simple de* $\varphi_n(1, c) = 0$.

Si les coefficients angulaires réels des asymptotes de $F = 0$ *sont tous rationnels,* $\neq 0$, *et différents,* $F = 0$ *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.*

En effet, on a

$$\varphi_n(x, y) = (y - c_1 x)\psi_{n-1}(x, y),$$

c_1 étant le coefficient angulaire rationnel d'une asymptote, et $\psi_{n-1}(x, y)$ un polynome homogène en x, y de degré $n - 1$ tel que $\psi_{n-1}(1, c_1) \neq 0$.

D'après (4), δ est rationnel, ainsi que d d'après (7).

Soit $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$, a_1 et b_1 étant deux entiers premiers entre eux; d'après (3),

$$b_1 q = a_1 p + \delta b_1,$$

où δb_1 est entier; b_1 étant fini, δb_1 diffère d'aussi peu qu'on veut de la valeur db_1 donnée par (7), ce qui exige, quand p est assez grand, puisque db_1 est un nombre déterminé indépendant de p,

$$\delta b_1 = db_1 = \text{un entier déterminé } \varpi,$$

et les points p, q sont sur la droite $b_1 y = a_1 x + \varpi$ et sur la courbe $F = 0$; ils ne peuvent donc être en nombre infini, puisque F est arithmétiquement irréductible (¹).

2° $k = 2$. Nous allons établir le théorème plus général suivant :

THÉORÈME III. — *Tout étant posé comme au premier alinéa du théorème I, supposons que $\varphi_n(x, y)$ admette le facteur simple irréductible du $r^{\text{ième}}$ degré* (²) $(r > 2)$

$$f(x, y) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} y + \ldots + \alpha_r y^r$$

à coefficients entiers. Soit c_1 une racine réelle de

$$\alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_r c^r = 0,$$

$\frac{q_h}{p_h}$ *la $h^{\text{ième}}$ réduite du développement en fraction continue de c_1, et*

$$\varphi_{n-1}(1, c_1) = \varphi_{n-2}(1, c_1) = \ldots = \varphi_{n-\mu+1}(1, c_1) = 0,$$
$$\varphi_{n-\mu}(1, c_1) \neq 0 \qquad (\mu > 1);$$

on aura (Lagrange)

$$p_{h+1} = C p_h^{r-1-\omega} \qquad (0 \leq \omega \leq r-2),$$

(¹) *Voir*, par exemple, notre Note déjà citée des *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, p. 190 et suiv.

(²) On peut parfaitement supposer $r = n$.

C étant une quantité finie positive; sur la branche infinie de $F = 0$, *qui a pour asymptote* $y = c_1 x$, *l'équation* $F = 0$ *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers, si l'on n'a pas*

$$\mu < (r - 1 - \omega)(r - \omega),$$

ou

$$\mu = (r - 1 - \omega)(r - \omega), \qquad 1 < 2 l C^{r-\omega-1},$$

l étant une quantité finie.

En effet, supposons que, le long de cette branche, $F = 0$ ait une infinité de solutions (2) en nombres entiers; on aura

$$q = c_1 p + \delta,$$

δ étant aussi petit qu'on veut quand p est assez grand; d'après (6)

$$\delta[\varphi_n(1, c_1) + \eta] + \frac{1}{p^{\mu-1}}[\varphi_{n-\mu}(1, c_1) + \eta_1] = 0,$$

η et η_1 étant aussi petits qu'on veut quand p est assez grand.

Nous pourrons d'ailleurs supposer c_1 positif : s'il était négatif, il suffirait de considérer l'équation déduite de $F = 0$ en changeant x en $-x$.

Alors on peut prendre p assez grand pour que

$$|\delta| < \frac{l}{p^{\mu-1}},$$

l étant fini et différant d'aussi peut qu'on veut de

$$\frac{|\varphi_{n-\mu}(1, c_1)|}{|\varphi'_n(1, c_1)|}.$$

La fraction $\frac{q}{p}$, quand p est assez grand, sera comprise entre deux réduites consécutives du développement en fraction continue de c_1 convenablement choisies, ou coïncidera avec l'une d'elles, et l'on pourra trouver une réduite de dénominateur assez grand pour que

$\frac{q}{p}$ ne soit pas compris entre deux réduites de dénominateur au moins égal. On peut donc trouver trois réduites consécutives $\frac{q_h}{p_h}$, $\frac{q_{h-1}}{p_{h-1}}$, $\frac{q_{h-2}}{p_{h-2}}$ telles que $\frac{q}{p}$ soit comprise entre les deux premières sans l'être entre les deux secondes, ou soit égale à la deuxième. On en conclura d'abord (¹)

$$p \geqq p_{h+1}.$$

En même temps on a l'une des deux inégalités

$$\left|\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}} - c_1\right| \leqq \left|\frac{q}{p} - c_1\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| \leqq \left|\frac{q}{p} - c_1\right|,$$

et, de plus,

$$\left|\frac{q}{p} - c_1\right| = \frac{|\delta|}{p} < \frac{l}{p^{\mu}} \leqq \frac{l}{p_{h+1}^{\mu}}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}} - c_1\right| > \left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| > \left|\frac{q_{h+3}}{p_{h+3}} - c_1\right|,$$

et (²)

$$\left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| > \frac{1}{2}\left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - \frac{q_{h+3}}{p_{h+3}}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{p_{h+2}p_{h+3}}.$$

On en conclut

$$2lp_{h+2}p_{h+3} > p_{h+1}^{\mu}. \tag{15}$$

Or, on a, d'après Lagrange (³),

$$\frac{1}{p_h p_{h+1}} = \frac{f(p_h, q_h)}{p_h^{\varepsilon} B},$$

où B reste fini, si grand que soit h. Si

$$f(p_h, q_h) > \theta p_h^{\omega} \quad (\omega > 0),$$

(¹) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5e édition, p. 17; 1885.

(²) *Ibid.*, p. 13.

(³) LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, p. 135; 1851.

θ étant une quantité positive et finie, on a

$$p_h^{r-1-\omega} > \frac{\theta}{B} p_{h+1},$$

c'est-à-dire, C étant une quantité finie positive,

$$p_{h+1} < C p_h^{r-1-\omega},$$

d'où

$$p_{h+2} < C p_{h+1}^{r-1-\omega}, \qquad p_{h+3} < C p_{h+2}^{r-1-\omega} < C^{r-\omega} p_{h+1}^{(r-1-\omega)^2}.$$

D'après (15)

$$p_{h+1}^{\mu} < 2lC^{r-\omega+1} p_{h+1}^{(r-1-\omega)(r-\omega)},$$

ce qui donne, ou bien

$$(16) \qquad \mu < (r-1-\omega)(r-\omega) \leq r(r-1),$$

ou bien

$$(17) \qquad \mu = (r-1-\omega)(r-\omega), \qquad 1 \leq 2lC^{r-\omega+1}.$$

Pour les petites valeurs de ω, ces formules ne donnent pas un résultat plus avantageux que le théorème I; ainsi, si $\omega = 0$, elles donnent $\mu < r(r-1)$, alors que le théorème I donne la limite supérieure $\mu < r$, plus avantageuse si $r > 3$. Mais il n'en sera pas de même pour les valeurs de ω telles que

$$(r-1-\omega)(r-\omega) < r.$$

Si, par exemple, c_i avait tous les quotients incomplets de son développement en fraction continue limités supérieurement, on aurait évidemment $\omega = r - 2$, et les formules (16) et (17) donneraient

$$\mu < 2 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 2 \qquad \text{avec} \qquad 1 < 2lC^3,$$

résultat plus avantageux que celui donné par le théorème I. C'est le cas quand $r = 2$.

Remarque. — On ne connaît malheureusement, croyons-nous, aucun moyen de déterminer ω, quand $r > 2$.

Ce théorème comporte un corollaire analogue à celui du théorème I : nous nous dispenserons de l'énoncer, sauf pour le cas où $r = 2$.

Alors, soit A une limite supérieure des quotients incomplets de la période dans le développement de c_1.

On aura ici $\mu = 2$, $\varphi_{n-1}(1, c_1) = 0$, et [1]

$$\begin{cases} p_{h+2} = p_{h+1}a_{h+1} + p_h < (a_{h+1} + 1)p_{h+1} < (A + 1)p_{h+1}, \\ p_{h+3} = p_{h+2}a_{h+2} + p_{h+1} < p_{h+1}(1 + A + A^2); \end{cases}$$

donc, d'après (15),

$$1 < 2l(A + 1)(A^2 + A + 1).$$

On en conclut

$$2(A + 1)(A^2 + A + 1) > \left|\frac{\varphi'_n(1, c_1)}{\varphi_{n-2}(1, c_1)}\right| + \zeta \geq \frac{|\varphi'_n(1, c_1)|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c_1)|},$$

ζ étant aussi petit qu'on veut quand p est assez grand.

En remarquant que, quand $\varphi_{n-2}(1, c_1) = 0$, le théorème I est applicable, on conclut :

Corollaire I. — Tout étant posé comme au premier alinéa du théorème I, soit $\varphi_{n-1} = 0$, et supposons que $\varphi_n(x, y)$ n'admette aucun facteur irréductible $f(x, y)$ qui ne soit du premier ou du deuxième degré, à coefficients entiers, ces facteurs étant simples et différents, ou pour lequel $f(1, c) = 0$ ait une racine réelle; supposons de plus que la courbe $F = 0$ n'ait aucune asymptote parallèle aux axes de coordonnées.

Soit A une limite supérieure des quotients incomplets des périodes dans le développement en fraction continue des racines réelles irrationnelles c' de $\varphi_n(1, c) = 0$; l'équation $F = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers si l'on n'a pas, quelle que soit la racine c',

$$2(A + 1)(A^2 + A + 1) > \frac{|\varphi'_n(1, c')|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|},$$

et $\varphi_{n-2} \neq 0$.

Il n'est pas difficile de trouver des exemples de pareilles équations.

---

[1] Serret, *loc. cit.*, p. 12.

Posons

$$\varphi_n(x, y) = \mu\chi_n(x, y),$$

$\chi_n(x, y)$ étant un polynome de degré n, homogène en x, y et à coefficients entiers donnés, polynome jouissant des mêmes propriétés que φ_n; φ_{n-2}, φ_{n-3}, ..., φ_0 étant donnés ainsi que χ_n, on peut toujours prendre μ assez grand pour que

$$\frac{\varphi_n(1, c')}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|} = \frac{\mu\chi_n(1, c')}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|} > 2(A + 1)(A^2 + A + 1).$$

Corollaire II. — Supposons que l'équation indéterminée

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_0 = 0$$

ait une infinité de solutions, $\varphi_n(1, c) = 0$ ayant ses racines réelles distinctes : 1° quand h croît indéfiniment sur trois quotients incomplets consécutifs a_h, a_{h+1}, a_{h-2} il ne peut y en avoir deux de finis; 2° si, à partir d'un certain rang, tout quotient incomplet a_h de rang pair (impair) est fini, tout quotient incomplet de rang impair (pair) est de l'ordre de p_h^{n-2}; 3° si les racines de $\varphi_n(1, c) = 0$ sont toutes réelles, et si $\varphi_0 = 1$, a_h est de l'ordre de p_h^{n-2}.

Dans ces deux cas, $\varphi_n(x, y)$ doit donc être irréductible.

La démonstration résulte de ce qui précède, et de cette remarque de Lagrange [1] que, si $\varphi_n(1, c) = 0$ a ses racines réelles et si $\varphi_0 = 1$, $\frac{y}{x}$ est une réduite d'une de ces racines.

III.

Les théorèmes qui précèdent comportent des extensions aux équations indéterminées à plusieurs variables. Nous nous contenterons d'en établir une pour le cas de trois variables.

Soit

$$F(x, y, z) = \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0 \tag{18}$$

[1] *Loc. cit.*, p. 685.

une équation algébrique à trois variables, de degré n, $\varphi_i(x, y, z)$ étant l'ensemble des termes de degré i en x, y, z. On sait déjà, par exemple, que l'équation indéterminée (18) n'aura en nombres entiers qu'un nombre limité de solutions si la surface (18), en coordonnées cartésiennes, n'a pas de points à l'infini; nous allons considérer d'autres cas.

Supposons que $\varphi_n(x, y, z)$ soit un produit de facteurs linéaires à coefficients entiers $ax + by + cz$, avec $a, b, c \neq 0$. On aura

$$\varphi_n = (ax + by + cz)\psi_{n-1}(x, y, z), \tag{19}$$

ψ_{n-1} étant un produit de $n-1$ facteurs linéaires. Si $F = 0$ a une infinité de solutions p, q, r en nombre entiers, il y en aura une infinité pour lesquelles une de ces quantités au moins, r par exemple, sera aussi grande qu'on veut. Pour qu'on ait $F(p, q, r) = 0$, il faudra que $\varphi_n(p, q, r)$ soit, pour une de ces solutions, de l'ordre de r^{n-1} au plus, si r est le plus grand des trois nombres p, q, r. Un des facteurs linéaires au moins de $\varphi_n(p, q, r)$ sera d'ordre $< r$ pour une infinité de systèmes p, q, r, et l'on pourra poser

$$ap + bq + cr = r\varepsilon = \delta, \tag{20}$$

ε étant aussi petit qu'on veut, si r est assez grand. Alors

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{\delta - ap - bq}{c}, \\ F(p, q, r) &= \varphi_n\left(p, q, \frac{\delta - ap - bq}{c}\right) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0 \\ &= \frac{\delta}{c}\varphi'_n\left(p, q, \frac{-ap - bq}{c}\right) + \varphi_{n-1}\left(p, q, \frac{-ap - bq}{c}\right) + \ldots \end{aligned}\right. \tag{21}$$

φ'_n désignant une dérivée par rapport à z. Deux cas pourront alors se présenter : ou bien aucun des facteurs linéaires de ψ_{n-1} n'est d'ordre $< r$, ou bien il y a $k-1$ facteurs de ψ_{n-1} d'ordre $< r$.

Dans le premier cas, δ doit rester fini quand r croît indéfiniment, et comme c'est un nombre entier, d'après (20), il n'aura qu'un nombre fini de valeurs. Les solutions p, q, r, qui, pour r assez grand, rendent

dans (20) ε aussi petit qu'on veut, sont groupées sur les courbes d'intersection de la surface (18) avec un nombre fini de plans parallèles au plan $ax + by + cz = 0$ et situés à distance finie.

Dans le deuxième cas, on aura k égalités

$$(22)\qquad \begin{cases} ap + bq + cr = \varepsilon r = \delta, \\ a'p + b'q + c'r = \varepsilon' r = \delta', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, ..., étant des facteurs linéaires à coefficients entiers de $\varphi_n(x, y, z)$. Si $k > 2$, on aura

$$\begin{cases} a\dfrac{p}{r} + b\dfrac{q}{r} + c = \varepsilon, \\ a'\dfrac{p}{r} + b'\dfrac{q}{r} + c' = \varepsilon', \\ a''\dfrac{p}{r} + b''\dfrac{q}{r} + c'' = \varepsilon'', \end{cases}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \zeta,$$

ζ étant aussi petit qu'on veut pour r assez grand, ce qui exige $\zeta = 0$, puisque le premier membre est un nombre entier déterminé. Les trois facteurs $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, $a''x + b''y + c''z$ seraient liés par une relation linéaire.

Excluons cette hypothèse, on a $k = 2$; sans entrer dans plus de détails, on voit de suite que, si δ et δ' ne sont pas finis, $\varphi_n(p, q, r)$ est de l'ordre de $\delta\delta' r^{n-2} > r^{n-2+\theta}$, θ étant > 0, ce qui est impossible quand $\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$ identiquement, ou quand $\varphi_{n-1}(x, y, z)$ est divisible par les deux facteurs rationnels $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$ (¹).

(¹) Il y a encore impossibilité quand $\varphi_{n-1}(x, y, z)$ est divisible par un de ces deux facteurs ou quand $\varphi_{n-1}(x, y, z) = \lambda \dfrac{\partial}{\partial z}\varphi_n(x, y, z)$, λ étant un nombre rationnel fini, et qu'aucun des entiers δ, δ' ne reste fini.

Dans ces hypothèses il faut que δ et δ' restent finis; les solutions considérées se trouvent sur un nombre fini de droites parallèles aux droites

$$ax + by + cz = 0, \qquad a'x + b'y + c'z = 0,$$

et ne peuvent être en nombre infini que sur celles de ces droites appartenant à la surface.

Alors, dans les deux cas, de l'équation $ax + by + cz - \delta = 0$ on peut tirer z et substituer dans $F = 0$. Sans chercher à faire une discussion plus complète, supposons $\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$.

Dans le premier cas, d'après (21), δ est nul, et

$$\varphi_n\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) = 0;$$

l'ensemble des termes du plus haut degré dans F devient

$$(23) \qquad \varphi_{n-\nu}\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) \neq 0 \qquad (\nu \geq 2).$$

$\varphi_{n-\nu}(x, y, z)$ étant le premier des polynomes $\varphi_{n-2}, \varphi_{n-3}, \ldots$, qui n'admette pas le facteur rationnel $ax + by + cz$. L'équation

$$(24) \qquad F\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) = 0$$

doit avoir une infinité de solutions en nombres entiers, car, d'après $ax + by + cz = 0$, à une infinité de valeurs de z doit correspondre une infinité de systèmes de valeurs x, y. Ceci ne pourra avoir lieu dans une foule d'hypothèses, d'après les paragraphes précédents, par exemple si (24) n'a aucun point à l'infini, ou encore [1] si la surface $\varphi_{n-\nu}(x, y, z) + \ldots + \varphi_0 = 0$ n'a aucun point à l'infini, ou si $\varphi_{n-\nu}(x, y, z)$ est un produit de facteurs linéaires rationnels, irréductibles, distincts et différents de $ax + by + cz$.

Dans le deuxième cas, les équations de la droite $ax + by + cz = \delta$,

---

[1] On pourrait aussi appliquer le théorème III et son corollaire, ou le théorème II.

$ax + by + cz = \delta'$, jointes à (18), ne peuvent déterminer qu'un nombre fini de valeurs de x, y, z, à moins que la droite n'appartienne à la surface. Si $\varphi_{n-2} = 0$, il faut que $\delta\delta' = 0$: on peut appliquer le raisonnement ci-dessus.

THÉORÈME IV. — *Soit*

$$F(x, y, z) = \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0 \tag{18}$$

une équation algébrique, à coefficients entiers, entre trois variables x, y, z, arithmétiquement irréductible, $\varphi_i(x, y, z)$ étant l'ensemble des termes de degré i en x, y, z, et $\varphi_n(x, y, z)$ étant un produit de facteurs linéaires à coefficients entiers, distincts,

$$a_k x + b_k y + c_k z \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

avec $a_k, b_k, c_k \neq 0$, et tels qu'il n'existe aucune relation entre deux ou trois quelconques d'entre eux.

1° *Si*

$$\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$$

ou

$$\varphi_{n-1} = \lambda \frac{d}{dz} \varphi_n(x, y, z),$$

λ étant une constante rationnelle, les solutions en nombres entiers de (18), à part un nombre limité, se trouvent sur un nombre fini de plans situés à distance finie et parallèles aux n plans du système

$$\varphi_n(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

2° *Si*

$$\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0,$$

et si

$$\varphi_{n-2}(x, y, z)$$

est un produit de facteurs linéaires, rationnels, irréductibles, distincts, $\alpha x + \beta y + \gamma z$ avec $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, et distincts des facteurs linéaires de $\varphi_n = 0$, les solutions en nombres entiers de (18), à part un nombre

limité, se trouvent sur un nombre fini de droites parallèles aux droites doubles de (25) *et situées sur la surface, s'il y en a.*

3° *Si*

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2} = 0,$$

et si

$$(26) \qquad F - \varphi_n = \varphi_{n-\nu} + \varphi_{n-\nu-1} + \ldots + \varphi_0 = \psi,$$

$\varphi_{n-\nu}(\nu > 2)$ *étant le premier des polynomes* $\varphi_{n-3}, \varphi_{n-4}, \ldots, \varphi_0$ *qui n'est pas nul identiquement, l'équation* (18) *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers quand la surface* $\psi = 0$ *n'a pas de points à l'infini, ou quand* $\varphi_{n-\nu}$ *est un produit de facteurs linéaires, rationnels, irréductibles, différents, et distincts de ceux de* φ_n.

Sur les fonctions abéliennes singulières;

(Deuxième Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Dans un premier Mémoire, inséré au Tome V (5e série) de ce *Journal*, j'ai commencé l'étude des fonctions abéliennes à deux variables que j'ai nommées *singulières* : ce sont celles qui admettent pour périodes normales les quantités

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g', \end{matrix}$$

liées par une *relation singulière*, c'est-à-dire de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

Le présent Mémoire continue la même étude, dans les domaines de la transformation et de la multiplication complexe.

Les fonctions abéliennes singulières admettent des transformations qui n'existent pas dans le cas général, et que je nomme *singulières*, par opposition aux transformations *ordinaires* de M. Hermite; la première Partie du Mémoire est consacrée à la recherche de ces transformations, à leur réduction, à la transformation des fonctions thêta et des fonctions intermédiaires singulières.

La seconde Partie s'applique aux transformations singulières du premier degré, dont je détermine complètement la forme générale; on y voit apparaître ce résultat curieux et inattendu que deux systèmes de fonctions abéliennes, liés par une transformation (singulière) de degré 1, n'ont pas toujours les mêmes modules : sous forme géométrique, c'est dire que deux surfaces hyperelliptiques, ayant des modules différents, peuvent se correspondre point par point.

Dans la troisième Partie est posé et résolu le problème de la multiplication complexe, considérée comme un cas particulier de la transformation : il s'agit de rechercher les fonctions abéliennes telles qu'une transformation convenable leur fasse correspondre des fonctions aux mêmes périodes. Nous trouvons ainsi que les fonctions singulières possèdent seules une multiplication complexe; à côté des fonctions simplement, doublement ou triplement singulières, et de fonctions réductibles à des fonctions elliptiques particulières, nous rencontrons d'intéressantes fonctions, simplement singulières, dont les périodes vérifient, en outre, deux relations quadratiques.

Ce sont là les seuls cas de multiplication complexe; nous les étudions avec détail, en indiquant toutes les multiplications correspondantes dans les cas les plus intéressants.

La quatrième et dernière Partie, enfin, traite des multiplications de degré 1, c'est-à-dire des transformations birationnelles des surfaces hyperelliptiques en elles-mêmes: nous y démontrons, qu'en dehors des correspondances évidentes $U = \pm u + c$, $V = \pm v + c'$, toutes les transformations cherchées dérivent de l'existence de relations singulières entre les périodes et se déterminent dès lors aisément; il n'y a d'exception que pour les surfaces attachées au radical $\sqrt{x^n + 1}$, dont le Chapitre final énumère complètement les transformations univoques.

Nota. — Les numéros des paragraphes du présent Travail font suite à ceux du précédent; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier Mémoire, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I.

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES.

136. Le problème général de la transformation des fonctions abéliennes, posé et résolu par M. Hermite [1], est le suivant :

Soit un premier système de fonctions abéliennes à deux variables, U *et* V, *admettant comme périodes normales* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'); *soit, de même, un second système analogue, de variables* u *et* v, *et de périodes* $(1, 0)$: $(0, 1)$; (g, h); (h, g') : *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes du second, et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v;$$

λ, μ, λ', μ' *désignant des constantes.*

Sous forme géométrique, le problème s'énonce ainsi :

Soit S *une surface hyperelliptique générale, pour laquelle les coordonnées d'un point s'expriment en fonction abélienne des variables* U *et* V *du premier système; soit, de même,* s *une surface analogue répondant aux variables* u *et* v *du second système : dans quel cas la correspondance* (1), *établie entre les points des deux surfaces, fait-elle, à un point* (u, v) *de* s, *répondre* UN ET UN SEUL *point* (U, V) *de* S?

Nous dirons que la transformation (1) fait passer des périodes G, H, G′ aux périodes g, h, g'; ou des variables U, V aux variables u, v; ou de la surface S à la surface s.

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855.

Par *point* U, V, on entendra *géométriquement* un point de S; *analytiquement*, un système de valeurs de U, V, défini aux périodes près.

157. Pour que les conditions du problème de la transformation soient vérifiées, il faut et il suffit qu'à un point (u, v) corresponde un seul point U, V; c'est-à-dire que, par les relations (1), U et V augmentent d'une de leurs périodes simultanées, quand u, v augmentent d'une des leurs. On a donc, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i des entiers, conformément aux notations de M. Hermite :

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu = b_0 + b_3 G + b_2 H, \\ \lambda' = a_1 + a_3 H + a_2 G, & \mu' = b_1 + b_3 H + b_2 G, \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ \lambda g + \mu h = d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{cases}$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ', G, H, G' entre ces huit relations conduit, entre g, h, g', à l'équation suivante, où l'on pose pour simplifier $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$:

$$(3)\quad \begin{cases} g[(ca)_{03} + (ca)_{12}] + g'[(bd)_{03} + (bd)_{12}] \\ \quad + h[(cb)_{03} + (ad)_{03} + (cb)_{12} + (ad)_{12}] \\ \quad + (h^2 - gg')[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + [(dc)_{03} + (dc)_{12}] = 0. \end{cases}$$

De même, l'élimination de λ, μ, λ', μ', g, h, g' entre les relations (2) donnerait, entre G, H, G', l'équation, équivalente à (3) :

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} G[(ad)_{31} + (bc)_{31}] + G'[(ad)_{02} + (bc)_{02}] \\ \quad + H[(ad)_{03} + (bc)_{03} + (ad)_{21} + (bc)_{21}] \\ \quad + (H^2 - GG')[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + [(ad)_{01} + (bc)_{01}] = 0. \end{cases}$$

Quand g, h, g' sont quelconques, l'équation (3) ne peut avoir lieu que si les coefficients de g, h, g', $h^2 - gg'$ et le terme constant y sont nuls : c'est l'hypothèse qu'a faite implicitement M. Hermite, et dont

il a déduit la théorie ordinaire de la transformation. Dans ce cas, M. Hermite a montré que les coefficients de l'équation (3 *bis*) sont également nuls, et réciproquement si les coefficients de (3 *bis*) sont nuls, ceux de (3) le sont aussi.

Au contraire, si g, h, g' et $h^2 - gg'$ satisfont à une relation linéaire à coefficients entiers, c'est-à-dire à une *relation singulière*, il existera d'autres transformations que celles de M. Hermite; c'est l'étude de ces transformations *singulières* qui va nous occuper maintenant.

138. Supposons donc que g, h, g' soient liés par la relation singulière

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, ..., E sont des entiers sans diviseur commun, et *qu'il n'y ait, entre g, h, g', aucune autre relation analogue*. On déduira de (3), en désignant par k un entier :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} (ac)_{03} + (ac)_{12} &= Ak, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= Ck, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= Dk, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= Ek, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12} &= Bk. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'une transformation ordinaire, ou d'Hermite, l'entier k est nul, et réciproquement.

Soient alors a_i, b_i, c_i, d_i des valeurs des seize entiers a, b, c, d [1] vérifiant les relations (5), où k est un entier, quelconque d'ailleurs; les relations (2) donneront linéairement les valeurs de λ, λ', μ, μ', et celles de G, H, G', en fonction de g, h, g', de sorte que l'on obtiendra ainsi tous les systèmes cherchés de périodes G, H, G', avec les transformations (1) correspondantes.

Cette méthode conduit sans difficulté aux formules suivantes, ana-

---

[1] Nous les appellerons les *entiers caractéristiques* de la transformation.

logues à celles de M. Hermite pour les transformations ordinaires :

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
G &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+[(bc)_{02}+(da)_{02}]h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')},\\
G' &= \frac{(cd)_{31}+(ac)_{31}g+[(bc)_{31}+(da)_{31}]h+(db)_{31}g'+(ab)_{31}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
-H &= \frac{(cd)_{03}+(ac)_{03}g+[(bc)_{03}+(da)_{03}]h+(db)_{03}g'+(ab)_{03}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
H &= \frac{(cd)_{12}+(ac)_{12}g+[(bc)_{12}+(da)_{12}]h+(db)_{12}g'+(ab)_{12}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
H^2\quad GG' &= \frac{(cd)_{01}+(ac)_{01}g+[(bc)_{01}+(da)_{01}]h+(db)_{01}g'+(ab)_{01}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};
\end{aligned}
\right.
$$

les dénominateurs étant les mêmes dans les cinq formules.

On obtiendrait de même g, h, g' en fonction de G, H, G' :

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+[(db)_{03}-(db)_{12}]H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+[(ac)_{03}-(ac)_{12}]H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
-h &= \frac{(bc)_{01}+(bc)_{31}G+[(bc)_{03}-(bc)_{12}]H+(bc)_{02}G'+(bc)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[(ad)_{03}-(ad)_{12}]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}G+[(cd)_{03}-(cd)_{12}]H+(cd)_{02}G'+(cd)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};
\end{aligned}
\right.
$$

les cinq dénominateurs étant aussi les mêmes.

En égalant les deux valeurs de H que donnent les relations (6), on retrouve, en tenant compte de (5), la relation singulière initiale

$$
(8)\qquad h[Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E]=0.
$$

De même en égalant les deux valeurs de h données par (7), on retrouve la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G'. Celle-ci, comme on l'a observé plus haut en invoquant un résultat de M. Hermite, n'est pas

une identité, puisque (3) n'en est une, en vertu de (5), que si k est nul, c'est-à-dire si la transformation est ordinaire. Donc :

Les fonctions abéliennes, initiales et finales, que lie une transformation singulière, sont singulières.

139. Soit alors

$$(9)\qquad A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G', les entiers qui y figurent n'ayant pas de diviseur commun; on a, en désignant par k' un entier :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} (ad)_{13} + (bc)_{13} &= A'k', \\ (ad)_{20} + (bc)_{20} &= C'k', \\ (ad)_{32} + (bc)_{32} &= D'k', \\ (ad)_{10} + (bc)_{10} &= E'k', \\ (ad)_{12} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (bc)_{03} &= B'k'. \end{aligned}\right.$$

140. *Transformation adjointe.* — La transformation définie par les équations (1), (2) et (5), et que nous appellerons plus brièvement la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i), fait répondre, à un point (u, v) de la surface s, un et un seul point (U, V) de la surface S. *Inversement*, il existe une transformation singulière, que nous nommerons *adjointe* de la première, faisant, à un point de S, correspondre un et un seul point de s.

Soit

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}$$

le Tableau des entiers de la première transformation; pour la trans-

formation adjointe, le Tableau sera (comme dans le cas des transformations ordinaires)

$$\begin{matrix} d_3 & c_3 & -b_3 & -a_3 \\ d_2 & c_2 & -b_2 & -a_2 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \\ -d_0 & -c_0 & b_0 & a_0 \end{matrix}$$

Pour vérifier que cette nouvelle transformation possède bien la propriété indiquée, il suffit d'observer que les équations (5) deviennent les équations (10) si l'on y remplace A, B, C, D, E par A', B', C', D', E', k par k', et tout nombre a_i, b_i, c_i, d_i du premier Tableau par le nombre qui occupe la même place dans le second Tableau.

De même, les équations (6) deviennent les équations (7) si l'on y fait la même substitution, en permutant g, h, g' et G, H, G'.

141. *Degré et indices d'une transformation.* — Nous appellerons *degré* de la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

et nous désignerons cette quantité par δ. Si la transformation est *ordinaire*, on sait que δ *est le carré de l'ordre*.

Nous introduirons, avec δ, deux autres entiers l et k que nous nommerons *indices* de la transformation. Le premier, l, sera défini par

$$l = (ad)_{03} + (ad)_{12}; \tag{11}$$

le second, k, est l'entier qui figure dans les formules (5).

Toutefois, pour définir k sans ambiguïté, *une convention est nécessaire*.

En effet, dans la relation singulière (4),

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les entiers A, B, C, D, E, qui n'ont, par hypothèse, aucun diviseur commun, ne sont définis qu'au signe près, c'est-à-dire que l'on peut changer simultanément leurs signes : ce changement, fait dans (5), entraîne aussi le changement de signe de k, de sorte que k présente une ambiguïté de signe. Pour préciser, nous supposerons que A est positif; dans le cas où A serait nul, nous supposerons $D > 0$, et, si D était aussi nul, $B > 0$. D'ailleurs, A, D, B ne peuvent être nuls à la fois, car l'invariant de la relation singulière, $B^2 - 4AC - 4DE$, serait nul, et l'on serait placé dans un cas spécial sans intérêt (I, n° **17**).

Grâce à cette convention, les signes de A, B, C, D, E sont définis, et il en est de même de celui de k.

On a entre δ, l et k une importante relation. On déduit, en effet, de (5) :

$$l(l + Bk) = [(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} - (bc)_{12}],$$

$$k^2(AC + DE) = [(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} - (db)_{12}] + [(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}],$$

et l'on vérifie que la somme des deux seconds membres est identique au déterminant δ. Donc

$$\delta = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 \tag{12}$$

ou

$$4\delta = (2l + Bk)^2 - \Delta k^2,$$

Δ désignant l'invariant $B^2 - 4AC - 4DE$ de la relation singulière (4).

142. *Degré et indices de la transformation adjointe.* — Pour la transformation adjointe, le second indice est l'entier k' qui figure dans les formules (10), en supposant que l'on fasse sur les signes de A, D, B la même hypothèse que sur A, D, B; soient δ' le degré et l' le premier indice. On a, d'après les n^os^ **140** et **141** :

$$\delta' = \delta, \qquad l' = (ad)_{03} + (bc)_{03}.$$

On a également la relation

$$(13) \qquad 2l + Bk = 2l' + B'k';$$

car, en vertu de la dernière des équations (5) ou (10), chacun des deux membres est égal à la quantité

$$(bc)_{03} + (bc)_{12} + (ad)_{03} + (ad)_{12}.$$

Enfin, puisque $\delta' = \delta$:

$$l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 = l'^2 + B'k'l' + (A'C' + D'E')k'^2,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = k'^2(B'^2 - 4A'C' - 4D'E').$$

Comme $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B'^2 - 4A'C' - 4D'E'$ sont respectivement les invariants, Δ et Δ', des relations singulières (4) et (9), entre g, h, g' et G, H, G', on peut écrire

$$(14) \qquad k^2\Delta = k'^2\Delta'.$$

L'équation (14) montre que Δ et Δ' sont de même signe, c'est-à-dire que l'invariant d'une relation singulière et celui de la relation singulière transformée ont le même signe : en vertu d'une propriété fondamentale des invariants (I, n° 14), ces deux quantités sont donc *positives*. Nous tirons de (14)

$$(14\ bis) \qquad k'\sqrt{\Delta'} = \varepsilon k\sqrt{\Delta},$$

ε désignant $+1$ ou -1.

Selon que ε sera égal à $+1$ ou à -1, nous dirons que la transformation est *droite* ou *gauche* : cette dénomination est d'ailleurs purement conventionnelle, puisqu'elle dérive des hypothèses faites sur les signes des coefficients dans les relations singulières (4) et (9).

Pour une transformation ordinaire, les indices h et h' sont nuls, ε est indéterminé.

143. *Signification analytique du degré.* — La transformation singulière

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v$$

fait correspondre à un *point* u, v un seul *point* U, V ; inversement, à un point U, V, combien correspondent de points u, v?

Augmentons U et V respectivement d'une période, c'est-à-dire de

$$N_0 + N_3 G + N_2 H \quad \text{et} \quad N_1 + N_3 H + N_2 G,$$

les N_i étant entiers; les équations (1) donneront de nouvelles valeurs de u, v, auxquelles correspondra un nouveau *point* u, v, à moins que u et v n'aient aussi augmenté d'une période, c'est-à-dire que l'on n'ait, en désignant par x_0, x_1, x_2, x_3 des entiers,

$$(15) \quad \begin{cases} N_0 + N_3 G + N_2 H = \lambda(x_0 + x_3 g + x_2 h) + \mu(x_1 + x_3 h + x_2 g') \\ N_1 + N_3 H + N_2 G = \lambda'(x_0 + x_3 g + x_2 h) + \mu'(x_1 + x_3 h + x_2 g') \end{cases}$$

On peut écrire ces équations en tenant compte de (2) :

$$\begin{aligned} N_0 + N_3 G + N_2 H = {} & x_0(a_0 + a_3 G + a_2 H) + x_1(b_0 + b_3 G + b_2 H) \\ & + x_2(c_0 + c_3 G + c_2 H) + x_3(d_0 + d_3 G + d_2 H), \\ N_1 + N_3 H + N_2 G = {} & x_0(a_1 + a_3 H + a_2 G') + x_1(b_1 + b_3 H + b_2 G') \\ & + x_2(c_1 + c_3 H + c_2 G') + x_3(d_1 + d_3 H + d_2 G'); \end{aligned}$$

relations qui doivent être des identités en G, H, G'. Elles sont en effet de la forme

$$N_1 G + N_2 H = M, \qquad N_1 H + N_2 G' = M',$$

les N et M étant des quantités réelles : si donc ces quantités ne sont pas toutes nulles, on en conclura, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', la relation inadmissible

$$H_1^2 - G_1 G'_1 = 0.$$

Par suite, les équations (15) donnent

$$(16)\quad \begin{cases} X_0 = a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3, \\ X_1 = a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3, \\ X_2 = a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3, \\ X_3 = a_3 x_0 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 x_3. \end{cases}$$

En vertu de ce qui précède, au système (U, V) et au système $(U + X_0 + X_1 G + X_2 H, V + X_1 + X_3 H + X_2 G)$ correspond le même point (u, v), si les équations (16) donnent pour x_0, x_1, x_2, x_3 des valeurs entières; il en résulte, pour le nombre des points (u, v) qui correspondent à un point (U, V), la conséquence suivante :

Considérons dans les équations (16) les X_i comme donnés et les x_i comme des inconnues; à deux systèmes de valeurs des X_i correspondent deux systèmes de valeurs des x_i, qui seront dits *non distincts* s'ils diffèrent de nombres entiers, et *distincts* dans le cas contraire : le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) est égal au nombre des solutions *distinctes* des équations (16), lorsque les X_i prennent toutes les valeurs entières possibles.

Or on peut, comme on sait, par des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, ramener le système d'équations (16) au type

$$(17)\quad \begin{cases} \Xi_0 = \lambda_0 \xi_0, \\ \Xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \\ \Xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \\ \Xi_3 = \lambda_3 \xi_3, \end{cases}$$

où les λ_i sont des entiers dépendant uniquement des a_i, b_i, c_i, d_i, les ξ_i les inconnues nouvelles et les Ξ_i des entiers pouvant prendre, comme les X_i, toutes les valeurs entières possibles. Le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) sera évidemment encore égal au nombre des solutions distinctes des équations (17).

Or il est clair qu'en donnant à Ξ_0 les valeurs $0, 1, \ldots, \bmod \lambda_0$; à Ξ_1 les valeurs $0, 1, \ldots, \bmod \lambda_1$, etc., on obtient pour les ξ_i des solutions

distinctes, c'est-à-dire ne différant pas de nombres entiers; pour d'autres valeurs des Ξ_i on obtient des solutions non distinctes des précédentes : le nombre cherché est donc égal à $\bmod \lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, c'est-à-dire, puisque les déterminants des inconnues dans (16) et (17) sont les mêmes, à $\bmod \delta$.

Ainsi :

A un point (U, V) *une transformation singulière fait correspondre un nombre de points* (u, v) *égal à son degré en valeur absolue.*

144. *Signe du degré.* — Soient toujours g_1, h_1, g'_1 et G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de g, h, g' et G, H, G'; on vérifie, en partant des formules (6) ou (7), la relation suivante :

$$h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1), \tag{18}$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive. Nous donnerons d'ailleurs de cette formule une vérification directe très simple, quand nous parlerons de la réduction des transformations singulières (n° **161**) : elle est analogue à la formule classique de M. Hermite pour les transformations ordinaires; δ remplace le carré de l'ordre.

On en conclut qu'une transformation singulière ne fera passer d'un système (G, H, G') de périodes *normales* (c'est-à-dire d'un système pour lequel $H_1^2 - G_1 G'_1$ est négatif) à un système (g, h, g') de périodes également *normales*, que si δ est positif.

C'est l'hypothèse que nous ferons toujours dans ce Mémoire : nous étudierons ailleurs les fonctions de u, v aux périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), pour lesquelles $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif; mais ici nous n'envisagerons que des fonctions abéliennes à périodes normales, ce qui nous oblige à admettre que les transformations singulières sont d'ordre positif,

$$\delta > 0. \tag{19}$$

Il sera aisé de reconnaître, dans les démonstrations qui vont suivre, celles qui s'appliquent aussi au cas où δ serait négatif.

Composition de deux transformations.

145. Soit une première transformation T

$$(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{U} = \lambda u + \mu v, \qquad \mathrm{V} = \lambda' u + \mu' v,$$

faisant passer des variables U, V et des périodes G, H, G' aux variables u, v et aux périodes g, h, g'. Effectuons maintenant une seconde transformation T_1

$$(\mathrm{T}_1) \qquad u = \rho u' + \sigma v', \qquad v = \rho' u' + \sigma' v',$$

faisant passer des variables u, v et des périodes g, h, g' aux variables u', v' et aux périodes $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}'$.

Les deux transformations T et T_1, effectuées successivement, font passer de U, V à u', v', c'est-à-dire qu'à un point u', v' correspond un seul point U, V donné par

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \lambda(\rho u' + \sigma v') + \mu(\rho' u' + \sigma' v'), \\ \mathrm{V} = \lambda'(\rho u' + \sigma v') + \mu'(\rho' u' + \sigma' v'). \end{cases}$$

On définit ainsi une nouvelle transformation, T_2, produit de T par T_1, $\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}\mathrm{T}_1$; proposons-nous de trouver ses entiers caractéristiques, son degré et ses indices.

146. Soient a_i, b_i, c_i, d_i et a'_i, b'_i, c'_i, d'_i les entiers caractéristiques de T et de T_1; ceux, a_i, b_i, c_i, d_i, de T_2 s'obtiennent comme il suit. On a par (2):

$$\lambda = a_0 + a_3\mathrm{G} + a_2\mathrm{H}, \qquad \mu = b_0 + b_3\mathrm{G} + b_2\mathrm{H},$$
$$\lambda' = a_1 + a_3\mathrm{H} + a_2\mathrm{G}, \qquad \mu' = b_1 + b_3\mathrm{H} + b_2\mathrm{G},$$
$$\lambda g + \mu h = d_0 + d_3\mathrm{G} + d_2\mathrm{H}, \qquad \lambda h + \mu g = c_0 + c_3\mathrm{G} + c_2\mathrm{H},$$
$$\lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3\mathrm{H} + d_2\mathrm{G}, \qquad \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3\mathrm{H} + c_2\mathrm{G},$$
$$\rho = a'_0 + a'_1 g + a'_2 h, \qquad \sigma = b'_0 + b'_1 g + b'_2 h,$$
$$\rho' = a'_1 + a'_3 h + a'_2 g, \qquad \sigma' = b'_1 + b'_3 h + b'_2 g,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On en conclut, exactement comme dans le cas classique des transformations ordinaires :

$$\begin{aligned}\lambda\rho + \mu\sigma &= \lambda a_0 + \mu a_1 + (\lambda g + \mu h) a_3 + (\lambda h + \mu g) a_2 \\ &= (a_0 + a_3 G + a_2 H) a'_0 + (b_0 + b_3 G + b_2 H) a'_1 \\ &\quad + (d_0 + d_3 G + d_2 H) a'_3 + (c_0 + c_3 G + c_2 H) a'_2.\end{aligned}$$

et par suite, en se reportant à (T_2), on aura

$$\begin{aligned}a_0 &= a_0 a'_0 + b_0 a'_1 + c_0 a'_2 + d_0 a'_3, \\ a_3 &= a_3 a'_0 + b_3 a'_1 + c_3 a'_2 + d_3 a'_3, \\ a_2 &= a_2 a'_0 + b_2 a'_1 + c_2 a'_2 + d_2 a'_3.\end{aligned}$$

Des calculs analogues fourniraient les autres entiers; on trouve ainsi les formules

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}a_i &= a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b_i &= a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c_i &= a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d_i &= a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3.\end{aligned}\right.$$

147. De là résulte immédiatement que le déterminant

$$(a'_i, b'_i, c'_i, d'_i)$$

est le produit des déterminants (a_i, b_i, c_i, d_i) et (a'_i, b'_i, c'_i, d'_i); en d'autres termes, si l'on désigne par $\delta, \delta_1, \delta_2$ les *degrés* des transformations T, T_1, T_2, on a

$$(21)\qquad \delta_2 = \delta\delta_1.$$

148. Passons maintenant au calcul des *indices*. Soient l, k; l_1, k_1; l_2, k_2 les indices de T, T_1, T_2; soient également

$$(22)\qquad A G + B H + C G + D (H^2 - G G) + E = 0,$$

$$(23)\qquad A g + B h + C g + D (h^2 - g g) + E = 0,$$

$$(24)\qquad A_1 \mathfrak{G} + B_1 \mathfrak{H} + C_1 \mathfrak{G} + D_1 (\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}) + E_1 = 0$$

les relations singulières entre les périodes; enfin, l_1, k_1 désigneront les indices de la transformation adjointe de T_1.

On a, par (5) et (10) :

$$(25)\quad \begin{cases} (ac)_{01} + (ac)_{12} = Ak, \\ (db)_{03} + (db)_{12} = Ck, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = Ek, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = l, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = l + Bk; \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} (a'c')_{03} + (a'c')_{12} = A_1k_1, \\ (d'b')_{03} + (d'b')_{12} = C_1k_1, \\ (a'b')_{03} + (a'b')_{12} = D_1k_1, \\ (c'd')_{03} + (c'd')_{12} = E_1k_1, \\ (a'd')_{03} + (a'd')_{12} = l_1, \\ (b'c')_{03} + (b'c')_{12} = l_1 + B_1k_1; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} (a'd')_{13} + (b'c')_{13} = Ak'_1, \\ (a'd')_{20} + (b'c')_{20} = Ck'_1, \\ (a'd')_{32} + (b'c')_{32} = Dk'_1, \\ (a'd')_{10} + (b'c')_{10} = Ek'_1, \\ (a'd')_{01} + (b'c')_{03} = l_1, \\ (a'd')_{12} + (b'c')_{12} = l_1 + Bk'_1. \end{cases}$$

Pour calculer k_2, observons que, par définition (5),

$$A_1k_2 = (a'c')_{03} + (a''c'')_{12};$$

d'où, en remplaçant les a'' et c'' par leurs valeurs (20),

$$\begin{aligned} A_1k_2 = {} & -(ac)_{01}[(ab)_{03} + (ab)_{12}] + (a'c')_{02}[(ac)_{03} + (ac)_{12}] \\ & - (ac)_{03}[(ad)_{03} + (ad)_{12}] + (a'c')_{12}[(bc)_{03} + (bc)_{12}] \\ & + (a'c')_{13}[(bd)_{03} + (bd)_{12}] - (a'c')_{23}[(cd)_{03} + (cd)_{12}]; \end{aligned}$$

et, en vertu de (25),

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 k_2 &= (a'c')_{01} Dk + (a'c')_{02} Ak + (a'c')_{03} l \\ &\quad + (a'c')_{12}(l + Bk) + (a'c')_{31} Ck + (a'c')_{23} Ek \\ &= (l + Bk)[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}] \\ &\quad - Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} \\ &\quad + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23}. \end{aligned}\right.$$

Par (26), $(a'c')_{03} + (a'c')_{12} = A_1 k_1$; si maintenant, dans les autres termes, on remplace A, B, C, D, E par leurs valeurs tirées de (27), il vient, après quelques calculs longs, mais faciles,

$$\begin{aligned} &- Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23} \\ &\quad = \frac{k}{k_1}[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}][(a'd')_{03} + (b'c')_{03}] = \frac{k}{k_1} A_1 k_1 l_1; \end{aligned}$$

d'où

$$A_1 k_2 = A_1 k_1 (l + Bk) + \frac{k}{k_1} A_1 k_1 l_1,$$

c'est-à-dire

$$k_2 = k_1 (l + Bk) + \frac{k k_1}{k_1} l_1.$$

Or on a (n° **142**)

$$2l_1 + Bk_1 = 2l_1 + B_1 k_1,$$

$$k_1 \sqrt{\Delta} = \varepsilon_1 k_1 \sqrt{\Delta_1},$$

en désignant par Δ et Δ_1 les invariants des relations singulières (23) et (24), et par ε_1 l'unité positive ou négative qui répond à la transformation T_1.

De là résulte l'expression finale de k_2 :

$$(29)\qquad 2k_2 = k_1(2l + Bk) + \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + B_1 k_1).$$

On pourrait calculer l_2 par une méthode analogue, en partant de $l_2 = (a''d'')_{03} + (a''d'')_{12}$; il sera plus simple d'utiliser la relation (21), $\delta_2 = \delta\delta_1$, qui s'écrit, en remplaçant les δ par leurs valeurs en fonction

des indices.

$$\begin{aligned}4(2l_2+B_1k_2)^2 &= 4\Delta_1 k_2^2\\ &= [(2l+Bk)^2-\Delta k^2][(2l_1+B_1k_1)^2-\Delta_1 k_1^2].\end{aligned}$$

Substituons à k_2 sa valeur (29), nous trouvons

$$\begin{aligned}4(2l_2+B_1k_2)^2 &= (2l+Bk)^2(2l_1+B_1k_1)^2\\ &\quad+2\sqrt{\Delta\Delta_1}\,\varepsilon_1 kk_1(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\Delta\Delta_1 k^2k_1^2;\end{aligned}$$

d'où

$$2(2l_2+B_1k_2)=\pm[(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\varepsilon_1 kk_1\sqrt{\Delta\Delta_1}].$$

On doit prendre le signe $+$; car, si $k=k_1=0$, c'est-à-dire si les deux transformations sont ordinaires, l, l_1, l_2 sont les ordres de T, T_1, T_2, et l'on sait que $l_2=ll_1$. La méthode de calcul de l_2 signalée plus haut donne le même résultat, sans introduire d'ambiguïté de signe. Ainsi,

$$(30)\qquad 2(2l_2+B_1k_2)=(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\varepsilon_1 kk_1\sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

Les formules (29) et (30) donnent la solution du problème posé, en fournissant les expressions des indices k_2 et l_2.

149. *Remarque I.* — Les calculs précédents supposent que T_1 est une transformation *singulière*, c'est-à-dire que k_1 et k_1' ne sont pas nuls, car on a tiré de (27) les valeurs de A, B, C, D, E, admettant ainsi $k_1'=0$.

Si T_1 est une transformation ordinaire, l'équation (28) est toujours vraie et donne

$$\begin{aligned}A_1k_2 &= A_1k_1(l+Bk)-Bk(ac)_{03}\\ &\quad-Dk(ac)_{01}+Ak(a'c)_{02}+Ck(ac)_{31}+Ek(ac)_{21}.\end{aligned}$$

Or la transformation T_1 conduit des périodes g, h, g' qui vérifient la relation singulière

$$(23)\qquad Ag+Bh+\ldots=0,$$

aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, vérifiant

$$(24) \qquad A_1\mathcal{G} + B_1\mathcal{H} + \ldots = 0.$$

D'ailleurs, les relations classiques de M. Hermite pour les transformations ordinaires donnent sans ambiguïté g, h, g', $h^2 - gg'$ en fonction de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}'$: si l'on porte ces expressions dans (23), et si l'on chasse le dénominateur, on retombe sur (24) à un facteur entier près, θ, ainsi qu'on l'a observé au n° **2** du premier Mémoire (où ce facteur a été désigné par ρ). On a trouvé alors

$$(31) \qquad \theta^2(B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1) = l_1^2(B^2 - 4AC - 4DE),$$

en désignant par l_1 l'ordre de T_1.

Si l'on compare ensuite les coefficients de $\mathcal{G}$ dans (24) et dans la relation déduite de (23) comme on vient de le dire, on trouve

$$A_1\theta = A(a'c')_{02} + C(a'c')_{34} - B(a'c')_{03} + D(a'c')_{04} + E(a'c')_{23};$$

d'où

$$A_1k_2 = A_1k_1(l + Bk) + kA_1\theta,$$

c'est-à-dire, puisque $k_1 = 0$,

$$k_2 = k\theta.$$

D'ailleurs, par (31),

$$\theta = \varepsilon_1 l_1\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}},$$

ε_1 désignant ± 1. Nous dirons que la transformation ordinaire T_1 est *droite ou gauche, par rapport à la relation singulière* (23), selon que ε_1 sera $+1$ ou -1, les conventions d'usage étant faites sur les signes de A, D, B et A_1, D_1, B_1.

Il vient ainsi

$$(32) \qquad k_2 = \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}\, l_1,$$

ce qui est la formule (29), où l'on fait $k_1 = 0$.

La formule (30) subsiste dès lors également et donne

$$(33)\qquad 2l_2 = B_1 k_2 + (2l + Bk)l_1.$$

150. *Remarque II.* — Si la *seconde* transformation, T_1, est ordinaire et du premier ordre, l_1 est égal à 1 et Δ à Δ_1 (I, n° **2**); on a alors $k_2 = \varepsilon_1 k$ et $2l_2 + B_1 k_2 = 2l + Bk$. De même, si la *première* transformation, T, est ordinaire et du premier ordre, c'est-à-dire si $l = 1$, $k = 0$, on a $k_2 = k_1$, $l_2 = l_1$.

Réduction d'une transformation singulière.

151. On peut réduire une transformation *singulière* quelconque à un type simple, en la faisant précéder et suivre de transformations *ordinaires* du premier ordre, convenablement choisies.

Tout d'abord, une transformation ordinaire du premier ordre permet de ramener la relation singulière entre les périodes g, h, g', au type

$$(R)\qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

β étant égal à 0 ou à ± 1, et α, γ étant entiers (I, n° **6**). De plus, on a le droit de supposer $\alpha > 0$, et même $\alpha = 1$ (I, n° **10**).

Avant d'aborder la théorie générale de la réduction, nous ferons connaître une transformation singulière simple, dont la considération nous sera très utile.

152. Cette transformation se définit ainsi : Soient u et v deux variables abéliennes, aux périodes (g, h, g') liées par la relation singulière (R); u et v deux autres variables aux périodes $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}')$ définies par les relations suivantes, où l et k désignent deux entiers et δ la quantité

$$(34)\qquad \delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2;$$

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{g}\delta &= lg - \gamma kh,\\ \mathfrak{h}\delta &= lh - \gamma kg' = \alpha kg + (l + \beta k)h,\\ \mathfrak{g}'\delta &= \alpha kh + (l + \beta k)g. \end{aligned}\right.$$

Les deux valeurs de $\mathfrak{K}\delta$ sont compatibles en vertu de

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

On conclut de (35)

$$(36)\qquad \begin{cases} g = (l+\beta k)\mathfrak{G} + \gamma k\mathfrak{K}, \\ h = (l+\beta k)\mathfrak{K} + \gamma k\mathfrak{G}' = -\alpha k\mathfrak{G} + l\mathfrak{K}, \\ g' = -\alpha k\mathfrak{K} + l\mathfrak{G}'; \end{cases}$$

d'où, entre $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G}'$, la relation

$$\alpha\mathfrak{G} + \beta\mathfrak{K} + \gamma\mathfrak{G}' = 0.$$

Cela posé, établissons entre u et v, u' et v' la correspondance

$$(\mathrm{T}_1)\qquad \begin{cases} u = (l+\beta k)u' + \gamma k v', \\ v = -\alpha k\, u' + l v'; \end{cases}$$

à un point u', v' correspondra un et un seul point u, v; car si u', v' augmentent d'une période, u et v augmentent aussi d'une période, d'après (36).

La correspondance (T_1) définit donc une *transformation* T_1, *faisant passer de* u, v *à* u', v'; les nombres caractéristiques de cette transformation s'obtiennent sans difficulté et l'on trouve

$$\begin{aligned} a'_0 &= (l+\beta k), & b'_0 &= \gamma k, \\ a'_1 &= -\alpha k, & b'_1 &= l, \\ a'_2 &= a_3 = 0, & b'_2 &= b'_3 = 0, \\ d'_0 &= d'_1 = d'_2 = 0, & c'_0 &= c'_1 = c'_3 = 0, \\ d'_3 &= 1, & c'_2 &= 1. \end{aligned}$$

Les indices, l_1 et k_1, de T_1 sont donnés par (5) :

$$\begin{aligned} l_1 &= (a'd')_{03} + (a'd')_{12} = l + \beta k, \\ \alpha k_1 &= (a'c')_{03} + (a'c')_{12} = -\alpha k. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$k_1 = -k.$$

Pour l'indice k_1 de la transformation adjointe, on a par (10) :

$$\alpha k'_1 = (a'd')_{13} + (b'c')_{13} = -\alpha k$$

ou

$$k'_1 = k_1.$$

Comme d'ailleurs les invariants des relations singulières entre g, h, g' et $\mathfrak{g}, \mathfrak{H}, \mathfrak{g}'$ sont égaux à $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, il résulte de là, par (14 *bis*), que la transformation (T_1) est droite. Enfin son degré, $l_1^2 + \beta k_1 l_1 + \gamma k_1^2$, est égal à la quantité δ ci-dessus (34).

155. Cela posé, soit T une transformation singulière quelconque, d'indices l et k et de degré $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, faisant passer des variables U, V aux variables u, v et aux périodes g, h, g' liées par (R).

Faisons-la suivre de la transformation T_1 définie ci-dessus, *où les entiers l et k sont précisément les indices de* T ; la transformation TT_1 fait passer des variables U, V aux variables u', v' et aux périodes $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}'$: je dis que TT_1 est une transformation *ordinaire*.

En effet, son second indice k_2 est donné par (29)

$$2k_2 = k_1(2l + \beta k) + \varepsilon_1 k(2l_1 + \beta k_1),$$

car $B = B_1 = \beta$ et $\Delta = \Delta_1$. Or, d'après le numéro précédent,

$$k_1 = -k, \qquad l_1 = l + \beta k \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = +1,$$

puisque T_1 est droite ; donc

$$k_2 = 0,$$

ce qui établit la proposition.

La transformation (TT_1) est donc ordinaire ; faisons-la précéder d'une transformation ordinaire du premier ordre T_0, conduisant des variables U, V et des périodes G, H, G', aux variables U', V' : la transformation $(T_0 TT_1)$ sera ordinaire et fera passer des variables U, V et des périodes G, H, G', aux variables u', v' et aux périodes $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}'$.

Or, d'après une proposition fondamentale [1], on peut choisir T_0 de telle sorte que les nombres entiers caractéristiques, a_t, b_t, c_t, d_t de $T_0 T T_1$, vérifient les conditions suivantes :

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0, \\ a_0,\ b_0,\ b_1,\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ d_0,\ d_1 > 0, \\ \qquad b_0 < b_1; \qquad c_0,\ c_1 < c_2, \\ \qquad d_0,\ \mathrm{mod}\, d_1,\ \mathrm{mod}\, d_2 < d_3. \end{array}\right.$$

On aura donc, pour définir $T_0 T_2$, d'après (1) et (2) :

$$(T_0 T T_1)\qquad U = a_0 u' + b_0 v', \qquad V = b_1 v',$$

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_0 \mathfrak{G} + b_0 \mathfrak{H} = d_0 + d_3 G + d_2 H, & a_0 \mathfrak{H} + b_0 \mathfrak{G} = c_0 + c_2 H, \\ b_1 \mathfrak{H} = d_1 + d_3 H + d_2 G', & b_1 \mathfrak{G} = c_1 + c_2 G. \end{array}\right.$$

L'ordre de $(T_0 T T_1)$ est δ, car son degré est le produit δ^2 des degrés de T et de T_1.

Enfin, cette transformation étant ordinaire et d'ordre δ, on a

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{ll} -c_0 d_3 + c_2 d_1 - c_1 d_2 & = 0, \\ b_0 d_3 + b_1 d_2 & = 0, \\ a_0 d_3 - b_1 c_2 & = \delta. \end{array}\right.$$

154. Remplaçons maintenant dans ces formules u' et v' par leurs valeurs en u et v déduites de (T_1); il vient, pour la relation entre U, V et u, v, c'est-à-dire pour la transformation $T_0 T$ [2] :

$$(T_0 T)\quad \left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{u}{\delta}[a_0 l + b_0 \alpha k] + \dfrac{v}{\delta}[-a_0 \gamma k + b_0 (l + \beta k)], \\ V = \dfrac{u}{\delta} b_1 \alpha k \qquad\qquad + \dfrac{v}{\delta} b_1 (l + \beta k). \end{array}\right.$$

---

[1] Voir, par exemple, KRAUSE, *Transformation der hyperelliptischen Funktionen* (Teubner, 1886), p. 78-79.

[2] D'après le n° 150, la transformation $T_0 T$ a les mêmes indices, l et k, que T, puisque T_0 est ordinaire et d'ordre 1.

155. Telle est la forme *nécessaire* de T_0T; mais il reste à exprimer que c'est là effectivement une *transformation* faisant passer de U, V à u, v, c'est-à-dire qu'à un point (u, v) correspond un seul point U, V. Or, si l'on augmente u et v de g et h, U et V augmentent, en vertu de (35), de $a_0\mathfrak{G}+b_0\mathfrak{H}$ et $b_1\mathfrak{H}$, c'est-à-dire d'une période, d'après (38); même résultat si l'on augmente u et v de h et g'. Il reste donc à écrire que U et V augmentent d'une période quand l'une des variables u et v augmente de 1, l'autre restant inaltérée. Ainsi en désignant par x, y, z, z' des entiers, il faut que

$$\frac{a_0 l + b_0 \alpha k}{\delta} = z + x\mathrm{G} + y\mathrm{H},$$

$$\frac{b_1 \alpha k}{\delta} = z' + x\mathrm{H} + y\mathrm{G}'.$$

Les entiers x et y doivent être nuls, sinon, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', la quantité $\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1\mathrm{G}'_1$ serait nulle, cas à rejeter.

On a un résultat analogue en augmentant v de 1, de sorte que, finalement, les seules conditions auxquelles aient à satisfaire les a_i, b_i, c_i, d_i sont, avec (37) et (39), que les quantités

$$(\mathrm{Q}) \qquad \frac{a_0 l + b_0 \alpha k}{\delta}, \quad \frac{b_1 \alpha k}{\delta}, \quad \frac{a_0 \gamma k - b_0(l + \beta k)}{\delta}, \quad \frac{b_1(l + \beta k)}{\delta}$$

soient entières.

Pour simplifier la discussion, nous supposerons, comme nous en avons le droit, que l'entier α est égal à $+1$ (n° **151**).

Les relations (39)

$$a_0 d_3 = b_1 c_2 = \delta$$

montrent que d_3 et c_2 sont des diviseurs de δ; alors

$$(40) \qquad a_0 = \frac{\delta}{d_3}, \qquad b_1 = \frac{\delta}{c_2}.$$

La relation (39)

$$b_0 d_3 = -b_1 d_2$$

donne alors

$$(41) \qquad b_0 = -\frac{\delta}{c_2 d_3} d_2,$$

ce qui montre que δd_2 doit être divisible par $c_2 d_3$. Portant ces valeurs de a_0, b_1, b_0 dans les quantités (Q), on met celles-ci sous la forme

$$(Q') \qquad \frac{l}{d_3} - \frac{k d_2}{c_2 d_3}, \quad \frac{k}{c_2}, \quad \frac{\gamma k}{d_3} + \frac{(l+\beta k) d_2}{c_2 d_3}, \quad \frac{l+\beta k}{c_2}.$$

Pour qu'elles soient entières, il faut d'abord que c_2 divise k et $l+\beta k$, c'est-à-dire que

$$(42) \qquad \begin{cases} k = c_2 \varpi_1, \\ l + \beta k = c_2 \varpi_2; \end{cases}$$

alors, par là même, c_2 divisera δ, car $\delta = l(l+\beta k) + \gamma k^2$.

Remplaçons l et k par ces valeurs dans les quantités (Q'); il faut que

$$(43) \qquad \frac{l - \varpi_1 d_2}{d_3} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma k + \varpi_2 d_2}{d_3}$$

soient entiers. Si c'est réalisé, la quantité $\frac{1}{d_3}(l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1)$, c'est-à-dire, d'après (42), $\frac{1}{c_2 d_3}\delta$, sera également entière; δ est donc divisible par $c_2 d_3$, et dès lors b_0, donné par (41), est entier, quel que soit d_2.

Ainsi, en laissant provisoirement de côté la première des relations (39), c_2 est un diviseur de k et de $l+\beta k$ et, par suite, de δ; d_3 est un diviseur de δ, tel que $c_2 d_3$ en soit un autre, et il s'agit de reconnaître si les expressions (43) sont entières, c'est-à-dire s'il existe des entiers d_2, x et y vérifiant les relations

$$(44) \qquad l - \varpi_1 d_2 - d_3 x = 0, \qquad \gamma k + \varpi_2 d_2 - d_3 y = 0,$$

ϖ_1 et ϖ_2 étant les quotients, par c_2, de k et $l+\beta k$.

Pour que les équations (44) aient des solutions entières en d_2, x

et y, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} -\varpi_1 & -d_3 & 0 \\ \varpi_2 & 0 & -d_3 \end{matrix}$$

divise les déterminants obtenus en associant une quelconque des colonnes de cette matrice à la colonne $\begin{matrix} l \\ \gamma k \end{matrix}$.

Soit θ le plus grand commun diviseur (positif) de ϖ_1, ϖ_2, d_3 :

$$\varpi_1 = \theta q_1, \qquad \varpi_2 = \theta q_2, \qquad d_3 = \theta \rho;$$

q_1, q_2 et ρ étant premiers entre eux. Le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice, c'est-à-dire de $d_3\varpi_1$, $d_3\varpi_2$, d_3^2, sera $d_3\theta$, ou $\theta^2\rho$; il faut qu'il divise les nombres

$$l d_3, \quad \gamma k d_3, \quad l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1.$$

Donc θ, qui divise k, puisqu'il divise ϖ_1, devra diviser l; ensuite, comme on a, en vertu de (42),

$$l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1 = \frac{\delta}{c_2},$$

il faut que $d_3\theta$ divise $\frac{\delta}{c_2}$; c'est-à-dire que $\theta^2\rho$ divise $\frac{\delta}{c_2}$.

Si ces conditions sont remplies, les équations (44) auront, en d_2, x et y des solutions entières, parmi lesquelles figureront évidemment, pour d_2, et en nombre limité, des valeurs de module inférieur à d_3.

Enfin la première des relations (39)

$$(45) \qquad -c_0 d_3 + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0$$

donnera pour c_0, d_1 et c_1 des solutions entières, parmi lesquelles, évidemment, des solutions en nombre limité, telles que c_0 et c_1 soient positifs et $< c_2$, et que d_1 soit, en valeur absolue, $< d_3$.

156. En résumé, θ est un diviseur commun positif de l et de k; c_2, en vertu de (42), un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l+\beta k}{\theta}$; δ, c'est-

à-dire $l(l+\beta k)+\gamma k^2$, est alors divisible par $c_2\theta^2$; ρ est un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que ρ et les nombres $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l+\beta k}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux. On prendra $d_3=\theta\rho$, et l'on pourra trouver un nombre entier d_2, de module inférieur à $\theta\rho$, vérifiant (44), c'est-à-dire, tel que

$$l-\frac{k}{c_2}d_2\equiv 0,\qquad \gamma k+\frac{l+\beta k}{c_2}d_2\equiv 0\qquad (\bmod\ \theta\rho).$$

Les autres entiers a_i, b_i, c_i, d_i se déterminent ensuite comme on l'a expliqué plus haut.

137. Voici donc le résultat final :

Soit un système de fonctions abéliennes singulières à deux variables, u, v, dont les périodes vérifient la relation

$$g+\beta h+\gamma g'=0;$$

pour trouver tous les systèmes des fonctions singulières à deux variables U, V, *tels qu'on puisse passer de l'un d'eux au système primitif, par une transformation singulière d'indices l et k et de degré δ ($\delta=l^2+\beta kl+\gamma k^2$), on procédera comme il suit*(¹) :

Soient

θ un diviseur commun positif de l et de k;

c_2 un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l}{\theta}$;

ρ un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que les nombres ρ, $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux.

On pourra toujours trouver un ou plusieurs entiers, d_2, en nombre limité, de module inférieur à $\theta\rho$, tels que l'on ait

$$\frac{l}{\theta}-\frac{k}{c_2\theta}d_2\equiv 0,\qquad \gamma\frac{k}{\theta}+\frac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\equiv 0\qquad (\bmod\ \rho).$$

(¹) Les deux indices l et k sont des entiers quelconques, tels seulement que δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\gamma k^2$, soit positif.

Les variables U, V sont alors liées à u, v par la transformation

$$(46)\quad \begin{cases} U = \dfrac{u}{\rho}\left[\dfrac{l}{\theta} - \dfrac{k}{c_2\theta}d_2\right] - \dfrac{v}{\rho}\left[\gamma\dfrac{k}{\theta} + \dfrac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\right], \\ V = u\dfrac{k}{c_2} + v\dfrac{l+\beta k}{c_2}. \end{cases}$$

Quant aux périodes G, H, G′ des fonctions abéliennes en U et V, elles sont liées à g, h, g' par les formules suivantes, déduites de (33) et de (35) :

$$(47)\quad \begin{cases} G = -\dfrac{c_1}{c_2} + \dfrac{1}{c_2^2}[kh + (l+\beta k)g'], \\ H = -\dfrac{c_0}{c_2} - \dfrac{1}{c_2\rho\theta}\left[\left(-l + \dfrac{k}{c_2}d_2\right)h + \left(\gamma k + \dfrac{l+\beta k}{c_2}d_2\right)g'\right], \\ G = \dfrac{c_0 d_2 - c_2 d_0}{c_2\rho\theta} + \dfrac{g}{c_2\rho^2\theta^2}[lc_2 - kd_2] \\ \qquad + \dfrac{h}{c_2\rho^2\theta^2}\left[-\gamma k c_2 - (2l+\beta k)d_2 + \dfrac{k}{c_2}d_2^2\right] \\ \qquad + \dfrac{g'}{c_2\rho^2\theta^2}\left[\gamma k d_2 + \dfrac{(l+\beta k)}{c_2}d_2^2\right]. \end{cases}$$

Dans ces formules, c_0, c_1, d_0 sont des entiers non négatifs quelconques, vérifiant les inégalités

$$c_0, c_1 < c_2, \quad d_0 < \rho\theta;$$

de plus la quantité

$$\frac{\rho\theta c_0 + d_2 c_1}{c_2}$$

doit être entière, et, en valeur absolue, inférieure à $\rho\theta$.

158. On peut compléter ce résultat, en déterminant les valeurs des *seize entiers caractéristiques* de la transformation ci-dessus : nous désignerons ces entiers par m_i, n_i, p_i, q_i, les lettres a_i, b_i, c_i, d_i ayant été employées tout à l'heure pour une autre transformation.

On trouve sans difficulté :

$$m_0 = \frac{l}{\varrho\vartheta} - \frac{k}{\varrho\vartheta c_2} d_2, \qquad m_1 = \frac{k}{c_2}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = 0;$$

$$n_0 = \frac{\gamma k}{\varrho\vartheta} - \frac{l + 3k}{\varrho\vartheta c_2} d_2, \qquad n_1 = \frac{l + 3k}{c_2}, \qquad n_2 = 0, \qquad n_3 = 0;$$

$$p_0 = c_0, \qquad p_1 = c_1, \qquad p_2 = c_2, \qquad p_3 = 0;$$

$$q_0 = d_0, \qquad q_1 = d_1, \qquad q_2 = d_2, \qquad q_3 = \varrho\vartheta.$$

On ne doit pas perdre de vue la relation (15) :

$$-c_0\varrho\vartheta + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0,$$

qui détermine d_1 ; de plus mod $d_1 < \varrho\vartheta$.

159. *Vérification.* — Les entiers m_i, n_i, p_i, q_i doivent satisfaire aux relations fondamentales (5) de la transformation singulière d'indices l et k, où $D = E = 0$, $A = 1$, $B = \beta$, $C = \gamma$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
(mp)_{03} + (mp)_{12} &= k,\\
(qn)_{03} + (qn)_{12} &= \gamma k,\\
(mn)_{03} + (mn)_{12} &= 0,\\
(pq)_{03} + (pq)_{12} &= 0,\\
(mq)_{03} + (mq)_{12} &= l,\\
(np)_{03} + (np)_{12} &= l + \beta k.
\end{aligned}$$

La vérification est immédiate.

160. *Remarque.* — Tous les systèmes de périodes G, H, G′ obtenus par les formules (47), pour des valeurs données de g, h, g', sont distincts à une transformation ordinaire près du premier ordre; c'est-à-dire que l'on ne peut passer de l'un d'eux à un autre par une transformation ordinaire d'ordre un. Cela résulte immédiatement de ce que la transformation ordinaire $T_0 T T_1$ du n° **135** est *réduite*, de telle sorte que deux transformations réduites ne peuvent être équiva-

lentes (à une transformation près du premier ordre) que si elles sont identiques [1].

161. Des formules (47) on déduirait sans difficulté la valeur de $H_1^2 - G_1 G'_1$, en désignant toujours par $G_1, \ldots$ les parties imaginaires de $G, \ldots$: il sera plus rapide d'opérer autrement.

La transformation $T_0 T T_1$ est ordinaire et d'ordre δ; elle fait passer de G, H, G' à $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$; on a donc, d'après M. Hermite,

$$\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1 = \frac{\delta^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ étant une quantité positive.

D'ailleurs les formules (35) donnent

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{G}_1 &= l g_1 - \gamma k h_1, \\
\delta \mathcal{H}_1 &= l h_1 - \gamma k g'_1, \\
&= \alpha k g_1 + (l + \beta k) h_1, \\
\delta \mathcal{G}'_1 &= \alpha k h_1 + (l + \beta k) g'_1,
\end{aligned}$$

d'où, en prenant pour $\delta^2 \mathcal{H}_1^2$ le produit des deux valeurs ci-dessus de $\delta \mathcal{H}_1$,

$$\delta^2 (\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1) = \delta (h_1^2 - g_1 g'_1)$$

et finalement

$$(h_1^2 - g_1 g'_1) = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ étant positif.

C'est la formule que nous avions annoncée au n° **144**.

Transformations singulières des fonctions intermédiaires.

162. Reprenons la transformation générale singulière (1), d'entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i, d'indices l et k et de degré δ :

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

---

[1] *Voir* par exemple Krause, *loc. cit.*, p. 79.

et considérons une fonction thêta $\Theta(U, V)$, des variables U et V, aux périodes (G, H, G'). Si m est l'ordre de $\Theta(U, V)$, on a

$$(48)\qquad \begin{cases} \Theta(U+1, V) = \Theta(U, V+1) = \Theta(U, V), \\ \Theta(U+G, V+H) = \Theta(U, V)e^{-2\pi i m u + \text{const.}}, \\ \Theta(U+H, V+G') = \Theta(U, V)e^{-2\pi i m v + \text{const.}}. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une telle fonction entière, il est nécessaire et suffisant que $H_1^2 - G_1G_1'$ soit négatif ($G_1, \ldots$ parties imaginaires de $G, \ldots$) et que l'entier m ait le signe de G_1 (ou celui de G_1', qui est le même).

Par l'intermédiaire de la transformation (1), $\Theta(U, V)$ devient une fonction $\psi(u, v)$ de u, v et l'on a, en vertu de (1) et de (2),

$$\begin{aligned} \psi(u+1, v) &= \Theta(U+\lambda, V+\mu) \\ &= \Theta(U + a_0 + a_3G + a_2H, V + a_1 + a_3H + a_2G'), \end{aligned}$$

et par suite, d'après (48),

$$\psi(u+1, v) = \Theta(U, V)e^{-2\pi i m(a_3U + a_2V) + \text{const}}$$

et en revenant aux variables u et v

$$\psi(u+1, v) = \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda a_3 + \lambda' a_2) + v(\mu a_3 + \mu' a_2)] + \text{const.}}.$$

De même

$$\begin{aligned} \psi(u, v+1) &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda b_3 + \lambda' b_2) + v(\mu b_3 + \mu' b_2)] + \text{const}}, \\ \psi(u+g, v+h) &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda d_3 + \lambda' d_2) + v(\mu d_3 + \mu' d_2)] + \text{const.}}, \\ \psi(u+h, v+g') &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda c_3 + \lambda' c_2) + v(\mu c_3 + \mu' c_2)] + \text{const}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(u, v) = \psi(u, v)e^{P(u, v)},$$

$P(u, v)$ désignant un polynome du second ordre en u, v : il est aisé de voir que l'on peut déterminer les coefficients de $P(u, v)$ de manière

que $\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v)$, et que $\varphi(u, v+1)$ reproduise $\varphi(u, v)$ à un facteur exponentiel près de la forme e^{bu}; on trouve ainsi

$$\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m u[b_2\lambda + b_2\lambda' - a_2\mu - a_2\mu']},$$

ou, en vertu des expressions (2) de λ, μ, λ', μ',

$$\varphi(u, v+1) = e^{-2\pi i m u[(ab)_{03} + (ab_{12})]}.$$

On trouve de même $\varphi(u+g, v+h)$, $\varphi(u+h, v+g')$, ce qui donne finalement, en désignant par ν et ν' des constantes :

$$\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m u[(ab_{03} + ab_{12})]},$$
$$\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m[u[(ad_{03} + ad_{12})] + v[bd_{03} + bd_{12} + g(ab_{03} + ab_{12})]] + \nu},$$
$$\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m[u[(ac_{03} + ac_{12})] + v[bc_{03} + bc_{12} + h(ab_{03} + ab_{12})]] + \nu'}.$$

165. Supposons d'abord que g, h, g' soient liés par la relation singulière la plus générale

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

les relations auxquelles satisfait $\varphi(u, v)$ sont, en tenant compte de (5),

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v),\\ &\varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m b u},\\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m[bu - Dg^2 v] + \nu},\\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m[Ahu + Ch + Bh + Dhh, v] + \nu'}.\end{aligned}\right.$$

Si g, h, g' sont liés par la relation singulière ramenée à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

ces relations deviennent

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v),\\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m(hu - k\gamma v) + \text{const.}},\\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{-2\pi i m[k\alpha u + l + k\beta)v] + \text{const.}}. \end{aligned}\right.$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît que $\varphi(u, v)$ est une de ces *fonctions intermédiaires singulières*, définies et étudiées dans la première Partie de ce Mémoire : c'est une fonction d'indices ml et mk (I, n° **28**).

Nous dirons aussi que la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (49), est une *fonction intermédiaire singulière, d'indices ml et mk*.

Ainsi :

164. *Une transformation singulière d'indices l et k, faisant passer des variables* U, V *aux variables u, v, transforme une fonction thêta, d'ordre m, de* U, V, *en une fonction intermédiaire singulière de u, v, d'indices ml et mk.*

165. Si l'on suppose $m = 1$ et si l'on fait subir aux variables u, v une nouvelle transformation singulière, d'indices l_1 et k_1, la fonction thêta initiale se transforme en une fonction intermédiaire singulière, dont les indices l_2 et k_2 sont évidemment ceux de la transformation qui est le produit des deux premières, et sont donnés par les formules (29) et (30). On en conclut, sous une autre forme, que :

Une transformation singulière, d'indices l_1 et k_1, faisant passer des variables u, v aux variables u', v', transforme une fonction intermédiaire singulière, d'indices l et k, de u, v, en une fonction intermédiaire singulière de u', v', dont les indices l_2 et k_2 s'obtiennent par les relations

$$2k_2 = k_1(2l + \mathrm{B}k) + \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1),$$

$$2(2l_2 + \mathrm{B}_1 k_2) = (2l + \mathrm{B}k)(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

On suppose que la relation singulière entre les périodes de u, v est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

et celle entre les périodes de u_1, v_1 :

$$A_1\mathfrak{g} + B_1\mathfrak{H} + C_1\mathfrak{g}' + D_1(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}') + E_1 = 0;$$

Δ et Δ_1 désignent respectivement les invariants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1$; enfin ε_1 désigne $+1$ ou -1 selon que la transformation d'indices l_1, k_1 est droite ou gauche (nos **142** et **149**) (¹).

(¹) *Remarque.* — Reprenons les fonctions intermédiaires singulières, $\varphi(u, v)$, du no 163, qui répondent à la relation singulière générale

$$(r) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

si l et k sont les indices de $\varphi(u, v)$, on a (49) :

$$(49) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i Dku}, \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i[Au - C(-Dg)k v] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{-2\pi i[Aku + (l + Bk + Dkh)v] + \nu'}. \end{cases}$$

La théorie de ces fonctions se déduit sans difficulté de celle des fonctions analogues étudiées dans notre premier Mémoire.

Effectuons en effet une transformation ordinaire du premier ordre, ramenant la relation (r) au type (de même invariant) :

$$(r') \qquad \alpha\mathfrak{g} + \beta\mathfrak{H} + \gamma\mathfrak{g}' = 0;$$

$\varphi(u, v)$ devient une fonction intermédiaire, $\psi(u', v')$, répondant à la relation (r'), et dont les indices, l_2 et k_2, sont donnés par les formules du no 165, où $k_1 = 0$, $l_1 = 1$, $\Delta_1 = \Delta$:

$$(s) \qquad k_2 = \varepsilon_1 k, \qquad \alpha l_2 + \beta k_2 = \gamma l + Bk.$$

La fonction $\psi(u', v')$ n'existe (I, no **28**), que si $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ est positif, et si $\alpha l_2 + \beta k_2$ est du signe de la partie imaginaire de $\mathfrak{g}$. Or ce signe est celui de la partie imaginaire de g, d'après M. Hermite (*Théorie des transformations ordinaires*); d'ailleurs, en vertu des valeurs (s) de k_2, l_2 et de l'égalité des

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES DU PREMIER DEGRÉ.

166. Parmi les transformations singulières, les plus simples et celles qui conduisent aux conséquences analytiques les plus intéressantes, sont celles du premier degré, c'est-à-dire celles qui répondent à $\delta = 1$.

On les obtient toutes, à une transformation ordinaire près du premier ordre, par la proposition générale du n° **157**.

---

invariants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, on a

$$l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2 = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

Donc :

1° *Les fonctions intermédiaires générales répondant à la relation singulière* (r), *et d'indices* l, k, *n'existent que si le nombre* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *est positif, et si* $2l + Bk$ *a le signe de la partie imaginaire de la période* g.

Les fonctions $\psi(u', v')$ vérifient les relations (49), où l'on remplace g, h, g' par $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}''$, l et k par l_2 et k_2, A, B, C, D par α, β, γ, o; nous savons (I, n° **28**) que, pour ν et ν' donnés, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ d'entre elles; donc :

2° *Les fonctions intermédiaires générales, d'indices* l, k, *qui répondent à des valeurs données des constantes* ν *et* ν' *dans* (49), *sont des fonctions linéaires et homogènes de* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *d'entre elles.*

De même, deux fonctions $\psi(u', v')$, d'indices l_2, k_2 et l'_2, k'_2 ont un nombre de zéros communs (I, n° **34**) égal à

$$2l_2 l'_2 + \beta(k_2 l'_2 + k'_2 l_2) + 2\alpha\gamma k_2 k'_2;$$

en remplaçant dans cette expression l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (s), on reconnaît que :

3° *Deux fonctions intermédiaires générales, d'indices* l, k *et* l', k', *répondant à la relation singulière* (r), *ont un nombre de zéros communs égal à :*

$$2ll' + B(lk' + kl') + 2(AC + DE)kk'.$$

Il s'agit, bien entendu, des zéros distincts à des périodes près.

En effet, soient l et k les indices d'une transformation T de degré m; on a

$$(1) \qquad l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1;$$

l et k n'ont pas de diviseur commun, de sorte que $\theta = c_2 = 1$; ρ, diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, est aussi l'unité, et d_2, entier de module inférieur à $\theta\rho$, est nul. Enfin, c_0, c_1, d_0, entiers positifs inférieurs à c_2 ou à $\theta\rho$, sont nuls.

La transformation T, d'indices l et k, est alors (46) :

$$(2) \qquad \begin{cases} U = lu - \gamma kv, \\ V = ku + (l + \beta k)v. \end{cases}$$

Les périodes de u, v sont toujours supposées liées par la relation singulière $g + \beta h + \gamma g' = 0$; les périodes de U, V sont

$$(3) \qquad \begin{cases} G = lg - \gamma kh, \\ H = lh - \gamma kg' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' = kh + (l + \beta k)g; \end{cases}$$

elles sont liées aussi par

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

Quant aux *entiers caractéristiques de la transformation* a_i, b_i, c_i, d_i, ils ont pour valeurs (n° **158**)

$$\begin{array}{llll} a_0 = l, & a_1 = k, & a_2 = 0, & a_3 = 0; \\ b_0 = -\gamma k, & b_1 = l + \beta k, & b_2 = 0, & b_3 = 0; \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0; \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1. \end{array}$$

167. Ainsi, les transformations singulières du premier degré sont liées aux solutions entières de l'équation (1), qui peut s'écrire, en

désignant par Δ l'invariant, $\beta^2 - 4\gamma$, de la relation singulière entre g, h, g',

$$(2l + \beta k)^2 - \Delta k^2 = 4.$$

C'est une *équation de Pell*, du type classique

$$x^2 - \Delta k^2 = \sigma^2,$$

4Δ étant ou divisible par $4\sigma^2$ ou congru à σ^2 suivant le module $4\sigma^2$: car ici $\sigma^2 = 4$, et l'invariant Δ est de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$. Le fait que $x = 2l + \beta k$ ne diminue pas la généralité, car si β est pair, Δ est de la forme $4N$ et x est pair; si β est impair, Δ est de la forme $4N + 1$ et x est pair ou impair en même temps que k.

Ainsi, à toute solution entière de l'équation de Pell

$$(4) \qquad x^2 - \Delta k^2 = 4$$

répond une transformation singulière et réciproquement, l étant donné par

$$2l + \beta k = x.$$

Cette équation (4) admet les solutions évidentes $k = 0$, $x = \pm 2$, donnant $l = \pm 1$. Il leur correspond les transformations évidentes et sans intérêt

$$(5) \quad U = u, \quad V = v, \quad G = g, \quad H = h, \quad G' = g',$$
$$(6) \quad U = -u, \quad V = -v, \quad G = -g, \quad H = -h, \quad G' = -g',$$

qui, d'ailleurs, sont ordinaires, puisque $k = 0$.

168. L'équation (4) n'admet de solutions entières, autres que les précédentes, que si Δ n'est pas carré parfait, c'est-à-dire dans les cas non elliptiques (I, n° **15**). Donc :

Les fonctions abéliennes du cas elliptique n'admettent pas de transformations singulières du premier degré.

169. Au contraire, si Δ n'est pas carré, on sait que l'équation (4)

admet une infinité de solutions entières, qui peuvent être considérées comme des puissances d'une même solution; elles sont comprises dans la formule [1]

$$(\mathrm{E}) \qquad \left(\frac{x_1 + k_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n = \frac{x + k\sqrt{\Delta}}{2},$$

n désignant un entier positif ou négatif, et (x_1, k_1) la plus petite solution positive de l'équation de Pell.

On en déduit que toutes les transformations singulières du premier degré sont des puissances de celle qui répond aux nombres x_1, k_1, c'est-à-dire à $n = 1$. Soient, en effet, T_n la transformation qui répond au nombre n; x_n et k_n les valeurs correspondantes de x et k; il suffit d'établir que $T_{n+1} = T_n T_1$ et que T_{-1} est l'inverse de T_1.

En premier lieu, si l'on se reporte aux formules du n° **166** qui donnent les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i et aux formules du n° **50** qui donnent celles de a_i', ..., pour le produit de deux transformations, il s'agit de vérifier les relations

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(x_{n+1} - \beta k_{n+1}) &= \tfrac{1}{4}(x_n - \beta k_n)(x_1 - \beta k_1) - \gamma k_n k_1,\\
k_{n+1} &= \tfrac{1}{2} k_n (x_1 - \beta k_1) + \tfrac{1}{2}(x_n + \beta k_n) k_1,\\
-\gamma k_{n+1} &= -\tfrac{1}{2}(x_n - \beta k_n)\gamma k_1 - \tfrac{1}{2}\gamma k_n (x_1 + \beta k_1),\\
\tfrac{1}{2}(x_{n+1} + \beta k_{n+1}) &= -\gamma k_n k_1 + \tfrac{1}{4}(x_n + \beta k_n)(x_1 + \beta k_1);
\end{aligned}$$

les huit autres étant satisfaites d'elles-mêmes.

Or l'équation (E) donne

$$\frac{x_{n+1} + k_{n+1}\sqrt{\Delta}}{x_n + k_n\sqrt{\Delta}} = \frac{x_1 + k_1\sqrt{\Delta}}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
2x_{n+1} &= x_1 x_n + k_1 k_n \Delta,\\
2k_{n+1} &= x_1 k_n + k_1 x_n,
\end{aligned}$$

et, à l'aide de ces valeurs de x_{n+1}, k_{n+1}, la vérification est immédiate.

---

[1] *Voir*, par exemple, DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3e édition de M. Dedekind, page 120.

En second lieu, pour $n = -1$, on a

$$x = x_1, \qquad k = -k_1,$$

et l'on reconnaît sans difficulté que le produit de la transformation (x_1, k_1) par la transformation $(x_1, -k_1)$ se réduit identiquement à la transformation unité. Ainsi :

Toutes les transformations singulières du premier degré sont les puissances, positives ou négatives, d'une même transformation de ce degré, T_1.

170. Bien entendu on ne regarde pas comme distinctes deux transformations singulières qu'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier *degré :* c'est ainsi que la transformation (2) et celle où l'on change simultanément les signes de l et de k ne sont pas distinctes, car la seconde s'obtient en faisant suivre la première de la transformation (6).

171. Ici se pose un problème très intéressant, qu'il sera plus simple d'énoncer en empruntant le langage géométrique :

Considérons deux surfaces hyperelliptiques, s et S, pour lesquelles les coordonnées d'un point s'expriment respectivement par des fonctions abéliennes aux périodes g, h, g' et G, H, G' : si l'on peut passer de G, H, G' à g, h, g' par une transformation singulière du premier degré, à un point de s correspond un et un seul point de S, et *réciproquement,* d'après la signification du degré. C'est précisément la transformation (2) qui établit cette correspondance *univoque* entre les points des deux surfaces.

La question qui intervient naturellement est la suivante :

Les deux surfaces s et S, *qui se correspondent point par point, ont-elles les mêmes modules,* en appelant *modules* d'une surface hyperelliptique ceux de la courbe de genre deux qui donne naissance aux fonctions abéliennes correspondant à la surface?

172. Précisons cette notion de modules. Supposons que les coordonnées homogènes d'un point de S soient proportionnelles à quatre

fonctions thêta, des variables U, V, formées avec les périodes G, H, G', et n'ayant *aucun facteur*, fonction de U, V, *commun;* admettons de plus qu'à un point de S réponde, aux périodes près, un et un seul système U, V. Une pareille représentation paramétrique n'est possible que d'une manière, à une transformation ordinaire près d'ordre un : car si les quatre coordonnées sont aussi proportionnelles à quatre fonctions thêta, sans facteur commun, de U', V', la transformation qui fait passer de U, V à U', V' est ordinaire, puisqu'elle change une fonction thêta en une fonction thêta; elle est du premier ordre, puisque à un système U, V (ou U', V') répond un seul point de la surface, et par suite un seul système U', V' (ou U, V). Nous dirons que les modules de S sont ceux des fonctions abéliennes de la représentation ainsi définie, ou ceux de la courbe de genre deux génératrice de ces fonctions.

175. Sur la surface S, si l'on désigne par $\Theta(U, V)$ une fonction thêta du *premier ordre*, aux périodes G, H, G', les courbes représentées par l'équation

$$\Theta(U+\alpha, V+\beta)=0,$$

où α et β sont deux constantes quelconques, sont de genre deux et de mêmes modules (¹); ces modules sont ceux de la surface S (²).

Effectuons maintenant la transformation singulière du premier degré, d'indices l et k, qui fait passer de S à s : la fonction thêta du premier ordre $\Theta(U+\alpha, V+\beta)$ se transforme en une fonction intermédiaire singulière (n° **161**), d'indices l et k, qui est évidemment de la forme

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu),$$

λ et μ dépendant linéairement de α et β.

(¹) *Voir* notre Mémoire *Sur les surfaces hyperelliptiques*, 4e série, t. IX de ce Journal, p. 422.

(²) En effet, sur une surface de Kummer, pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables U et V, les courbes $\Theta(U+\alpha, V+\beta)=0$ ont pour modules les rapports anharmoniques quatre à quatre des six points doubles situés sur une même conique (*Ibid.*, p. 114), c'est-à-dire les modules des fonctions abéliennes de la représentation.

Cela posé, si les deux surfaces s et S ont les mêmes modules, c'est qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation *ordinaire* du premier ordre; une telle transformation, comme on le sait depuis M. Hermite, et comme cela résulte aussi du théorème plus général du n° **164**, change une fonction thêta d'ordre un de U et V, en une fonction thêta d'ordre un de u, v. Dès lors, soient U, V un point quelconque de S; u, v et u', v' les points de s qui lui correspondent respectivement par la transformation singulière et par la transformation ordinaire qu'on vient de définir : la transformation qui fait passer, sur s, du point u', v' au point u, v est univoque et birationnelle, puisque les deux précédentes le sont, et elle transforme une fonction thêta d'ordre un, $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$, en une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k, $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, λ et μ dépendant linéairement de α' et β'.

Réciproquement, si la surface s admet une transformation birationnelle en elle-même, transformant $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$ en $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, les deux surfaces s et S ont les mêmes modules. En effet, la transformation singulière du premier degré, qui mène de S à s, fait correspondre point par point les courbes

$$\Theta(U+\alpha, V+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

de sorte que les courbes

$$\Theta(U+\alpha, V+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \theta(u'+\alpha', v'+\beta)=0$$

se correspondent également point par point et ont dès lors les mêmes modules : ces modules étant respectivement ceux des surfaces S et s, la proposition est établie.

Donc, en résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que S et s aient les mêmes modules est que s admette une transformation birationnelle en elle-même faisant correspondre à la courbe

$$\theta(u+\alpha', v+\beta')=0,$$

où θ est une fonction thêta d'ordre un, une courbe

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

où φ est une fonction intermédiaire singulière, ayant pour indices ceux de la transformation singulière du premier degré qui fait passer de $\mathcal{S}$ à s.

174. Nous verrons plus loin, dans le Chapitre de la Multiplication singulière, que les transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique *simplement singulière* en elle-même sont comprises dans les formules (n° **195**)

$$(8)\qquad \begin{cases} u' = \rho u - \gamma\sigma v, \\ v' = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v, \end{cases}$$

en supposant toujours que les périodes g, h, g' soient liées par la *seule relation* $g + \beta h + \gamma g' = 0$, et en désignant par ρ et σ deux entiers, tels que

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Soit maintenant posé

$$\theta(u' + \alpha', v' + \beta') = \psi(u, v);$$

il s'agit d'exprimer que $\psi(u, v)$ est une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k. On a évidemment

$$\psi(u + 1, v) = \psi(u, v + 1) = \psi(u, v),$$

car augmenter u ou v de l'unité revient à augmenter u' et v' de nombres entiers, ce qui ne change pas la fonction $\theta(u' + \alpha', v' + \beta')$. On a ensuite

$$\begin{aligned} \psi(u + g, v + h) &= \theta(u' + \alpha + \rho g - \gamma\sigma h, v' + \beta + \sigma g + (\rho + \beta\sigma) h) \\ &= \theta(u' + \alpha' + \rho g - \gamma\sigma h, v' + \beta + \rho h - \gamma\sigma g), \end{aligned}$$

en tenant compte de $g + \beta h + \gamma g' = 0$, et, par suite, en vertu des propriétés fondamentales des fonctions thêta,

$$\begin{aligned} \psi(u + g, v + h) &= \theta(u' + \alpha', v' + \beta') e^{-2\pi i(\rho u' - \gamma\sigma v' + \text{const.})} \\ &= \psi(u, v) e^{-2\pi i[(\rho^2 - \gamma\sigma^2)u - \gamma\sigma(2\rho + \beta\sigma)v + \text{const.}]}. \end{aligned}$$

On trouverait de même

$$\psi(u+h, v+g') = \psi(u, v)\, e^{2\pi i\sigma(2\rho+\beta\sigma)u + (\rho^2-\gamma\sigma^2+2\beta\rho\sigma+\beta^2\sigma^2)v + \text{const.}},$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\psi(u, v)$ soit une fonction intermédiaire singulière d'indices l, k sont

$$(9) \qquad \begin{cases} l = \rho^2 - \gamma\sigma^2, \\ k = \sigma(2\rho + \beta\sigma). \end{cases}$$

Cela revient à dire que la substitution linéaire à coefficients entiers

$$(10) \qquad \begin{cases} U = lu - \gamma kv, \\ V = ku + (l + \beta k)v \end{cases} \qquad (l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1)$$

doit être le carré d'une substitution, également à coefficients entiers,

$$(11) \qquad \begin{cases} U = \rho u - \gamma\sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v, \end{cases}$$

où l'on a

$$(12) \qquad \rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

175. *Deux cas* sont maintenant à distinguer, selon que la forme $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2$ ne peut ou peut représenter le nombre -1.

176. *Dans le premier cas,* on a nécessairement dans (12)

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = 1;$$

et il résulte du n° **169** que toutes les substitutions des formes (10) et (11) sont des puissances d'une substitution du même type, T_1, où l et k seraient remplacés par la plus petite solution, l_1, k_1, de l'équation $l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1$. Si donc la substitution (10) est une puissance de T_1 *paire,* T_1^{2q}, les entiers ρ et σ seront les coefficients de la substitution T_1^q, et les équations (9) seront satisfaites pour ces valeurs de ρ et σ, c'est-à-dire que les deux surfaces S et s auront les mêmes modules.

Si, au contraire, la substitution (10) est une puissance *impaire.*

T_1^{2q+1}, elle ne peut être le carré d'une substitution de même forme, puisque celle-ci serait également une puissance de T_1 : on ne peut donc trouver des entiers ρ et σ vérifiant les équations (9), c'est-à-dire que les deux surfaces S et s n'ont pas les mêmes modules.

Soit alors s_1 la surface transformée de S par la transformation T_1 ; il est clair que la transformée de S par la transformation T_1^{2q+1} a les mêmes modules que s_1, car on l'obtient en effectuant sur s_1 la transformation T_1^{2q}, laquelle est le carré de T_1^q. Ainsi, les surfaces obtenues en effectuant sur S les transformations T_1^{2q+1} n'ont pas les mêmes modules que S, mais ont entre elles les mêmes modules.

177. Plaçons-nous maintenant *dans le second cas*, où la forme $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2$ peut représenter -1. Soit ρ_0, σ_0 une solution de l'équation $\rho_0^2 + \beta\rho_0\sigma_0 + \gamma\sigma_0^2 = -1$, et désignons par Σ_0 la substitution (11), où ρ et σ sont remplacés par ρ_0 et σ_0.

Il est clair que la substitution Σ_0^2 est du type (10); on a en effet pour cette substitution

$$l = \rho_0^2 - \gamma\sigma_0^2, \qquad k = \sigma_0(2\rho_0 + \beta\sigma_0),$$

et l'on vérifie que

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = +1.$$

Par suite

$$\Sigma_0^2 = T_1^n,$$

n désignant un entier et T_1 ayant la même signification que ci-dessus. Je dis que cet entier est nécessairement impair. Si, en effet, il était pair, $n = 2q$, on aurait

$$\Sigma_0^2 = (T_1^q)^2,$$

c'est-à-dire que les carrés des deux substitutions Σ_0 et T_1^q seraient les mêmes. Or T_1^q est de la forme (10), soient l' et k' les valeurs correspondantes de ses coefficients; en écrivant que Σ_0^2 est la même substitution que $(T_1^q)^2$, on a

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_0^2 - \gamma\sigma_0^2 &= l'^2 - \gamma k'^2, \\ \sigma_0(2\rho_0 + \beta\sigma_0) &= k'(2l' + \beta k'). \end{aligned} \right.$$

En éliminant ρ_0, on obtient l'équation bicarrée en σ_0 :

$$\sigma_0^4(\beta^2-4\gamma)-2\sigma_0^2(2l'^2-2\gamma k'^2+2\beta l'k'+\beta^2k'^2)+k'^2(2l'+\beta k')^2=0,$$

dont les racines sont

$$\sigma_0^2=\frac{2l'^2-2\gamma k'^2+2\beta k'l'+\beta^2k'^2\pm 2(l'^2-\beta k'l'+\gamma k'^2)}{\beta^2-4\gamma}$$

d'où

1° $$\sigma_0^2=\frac{4l'^2+4\beta k'l'+\beta^2k'^2}{\beta^2-4\gamma};$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0=\pm\frac{2l'+\beta k'}{\sqrt{\Delta}},$$

en désignant toujours par Δ l'invariant, $\beta^2-4\gamma$, de la relation entre les périodes. Or, le cas elliptique étant exclu, puisqu'il n'y a pas alors de transformations singulières du premier ordre, Δ n'est pas un carré parfait, de sorte que les valeurs ci-dessus de σ_0 ne sont pas entières, et sont dès lors inadmissibles.

2° $$\sigma_0^2=k'^2;$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0=k'\varepsilon,$$

ε désignant ± 1. On en conclut par (13)

$$\rho_0=l'\varepsilon,$$

de sorte que

$$\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2=l'^2+\beta k'l'+\gamma k'^2=1,$$

ce qui est inadmissible, puisque $\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2$ a été supposé égal à -1.

Donc enfin n ne peut être pair, c'est-à-dire que

$$\Sigma_0^2=T_1^n=T_1^{2q+1},$$

d'où

$$T_1=\Sigma_0^2T_1^{-2q}.$$

Or Σ_0 et T_1^q sont des substitutions de la forme (11), et l'on vérifie sans difficulté que si A et B sont deux substitutions de cette nature, on a $AB = BA$, c'est-à-dire

$$A^2B^2 = (AB)^2;$$

donc

$$T_1 = (\Sigma_0 T_1^q)^2,$$

c'est-à-dire que T_1, et toutes ses puissances, sont des puissances paires d'une même substitution; donc, d'après ce qui précède, les surfaces S et s ont les mêmes modules.

178. Voici le résumé de cette théorie :

Soit une surface hyperelliptique pour laquelle les périodes des fonctions abéliennes correspondantes (n° **172**) *sont liées par la relation*

$$g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

Si la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut représenter le nombre -1, toutes les surfaces que l'on déduit de la première par une transformation singulière du premier degré ont les mêmes modules qu'elle.

Si la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ ne peut représenter -1, les transformations singulières du premier degré étant, comme toujours, des puissances d'une même transformation T_1, les surfaces déduites de la surface primitive par les transformations T_1^{2q} ont les mêmes modules qu'elle; les surfaces déduites par les transformations T_1^{2q+1} ont entre elles les mêmes modules, mais n'ont pas les modules de la surface primitive.

Les *périodes* G, H, G', qui répondent à une des surfaces transformées de la première et de modules différents, sont données par les formules (n° **166**) :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} G &= l_1 g - \gamma k_1 h, \\ H &= l_1 h - \gamma k_1 g, \\ G' &= k_1 h + (l_1 + \beta k_1) g'; \end{aligned}\right.$$

l_1, k_1 désignent toujours la plus petite solution en nombres entiers

(autre que 1, 0) de l'équation

$$l_1^2 + \beta k_1 l_1 + \gamma k_1^2 = 1 \text{ [1]}.$$

179. *Remarque I.* — La propriété, pour la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, de représenter -1, ne dépend (comme cela doit être) que du discriminant $\beta^2 - 4\gamma$, c'est-à-dire de l'invariant Δ. En effet, la relation $x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = -1$ peut s'écrire

$$(2x + \beta y)^2 - \Delta y^2 = -4,$$

ce qui revient *exactement* à dire que la forme $X^2 - \Delta Y^2$ peut représenter -4 (n° **167**).

180. *Remarque II.* — Dans le cas où la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut représenter -1, toutes les substitutions (11) :

$$U = \rho u - \gamma\sigma v,$$
$$V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v,$$

où

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1$$

sont des puissances d'une seule d'entre elles (ainsi que cela a été démontré pour le cas où la forme ne peut représenter -1). Pour simplifier, disons que la substitution est droite ou gauche selon qu'elle correspond à $+1$ ou à -1. On a vu que les substitutions droites sont des puissances de T_1, et l'on a trouvé (n° **177**)

$$T_1 = \Sigma_1^2,$$

Σ_1 étant gauche (car c'est le produit d'une substitution gauche, Σ_0, par une droite, T_1^{-2}). Soit alors Σ une substitution gauche quelconque:

---

[1] Soit une surface de Kummer, s, pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables u et v, formées avec les périodes g, h, g'; soit de même S une surface analogue répondant aux variables U et V et aux périodes G, H, G'; il est clair que la transformation $U = l_1 u - \gamma h_1 v$; $V = k_1 u + (l_1 + \beta k_1) v$ est birationnelle entre les points des deux surfaces : on voit ainsi que deux surfaces de Kummer peuvent se correspondre point par point sans que les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points doubles situés sur une même conique soient les mêmes pour les deux surfaces.

$\Sigma\Sigma_1$ est droite, donc

$$\Sigma\Sigma_1 = T_1^r = \Sigma_1^{2r},$$

d'où

$$\Sigma = \Sigma_1^{2r-1}.$$

Les substitutions droites sont donc des puissances paires, les substitutions gauches des puissances impaires d'une même substitution Σ_1.

De plus : *toute substitution droite est le carré d'une autre substitution, droite ou gauche.*

181. Nous sommes arrivés au n° **178** à la notion de surfaces (hyperelliptiques) se correspondant point par point sans avoir les mêmes modules; ce résultat, assez inattendu si l'on s'en tient à l'analogie avec le cas des courbes, peut recevoir une autre forme géométrique.

Une surface hyperelliptique générale S est une surface qui correspond *point par couple* à une courbe C, de genre deux ([1]), c'est-à-dire qu'à un couple de points pris sur C répond un et un seul point de S, et réciproquement : dès lors le fait que deux surfaces hyperelliptiques peuvent se correspondre point par point sans avoir les mêmes modules montre que deux courbes de genre deux peuvent se correspondre *couple par couple* sans avoir les mêmes modules. Ces courbes de genre deux donnent naissance, d'après tout ce qui précède, à des fonctions abéliennes singulières; il serait intéressant de poursuivre des recherches analogues sur deux courbes de genre quelconque.

182. Le théorème général du n° **178** résout, *au point de vue des périodes*, le problème de la détermination des couples de surfaces hyperelliptiques se correspondant point par point, sans avoir les mêmes modules : les formules (1 ζ) donnent, en effet, les valeurs des périodes G, H, G′, répondant à l'une des surfaces, en fonction des périodes g, h, g, qui répondent à l'autre.

Il resterait à compléter ce résultat *au point de vue des modules*,

---

([1]) Voir, par exemple, notre Mémoire *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (ce Journal, 5e série, t. II, p. 263).

c'est-à-dire à déterminer tous les systèmes de modules *différents* tels que les surfaces hyperelliptiques correspondantes soient représentables point par point l'une sur l'autre ([1]).

TROISIÈME PARTIE.

MULTIPLICATION COMPLEXE.

183. Le problème de la multiplication complexe, extension directe du problème analogue pour les fonctions elliptiques, peut se poser ainsi :

Soit un système de fonctions abéliennes à deux variables U, V aux périodes G, H, G', on opère sur ces périodes une transformation quelconque, ordinaire ou singulière : il s'agit de reconnaître dans quel cas les périodes transformées (g, h, g') seront identiques aux périodes primitives (G, H, G').

Au point de vue géométrique, étant donnée une surface hyperelliptique, liée aux paramètres u et v, si l'on pose

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

peut-on déterminer les constantes λ et μ de manière qu'à un point (u, v) de la surface réponde *un et un seul point* (U, V) de la même surface ?

Ce problème comprend celui de la recherche des *transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique en elle-même.*

184. *Remarque.* — La multiplication complexe n'a pas été jusqu'ici, à notre connaissance du moins, traitée avec la généralité qu'elle comporte par les divers auteurs qui s'en sont occupés. C'est ainsi que MM. Frobenius, Weber, Wiltheiss ([2]) se sont bornés au cas où la

---

([1]) *Voir* à ce sujet une Note que nous avons publiée aux *Comptes rendus* (2e semestre 1899).

([2]) Frobenius, *Journal de Crelle*, t. XCV, p. 264. — Weber, *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX. — Wiltheiss, *Math. Annalen*, t. XXI, p. 385-398.

transformation qui fait passer des variables U, V aux variables u, v, est une transformation ordinaire d'Hermite, sans prendre garde aux transformations singulières qui conduisent précisément aux multiplications les plus intéressantes.

Il y aura, d'après cela, deux espèces de multiplications complexes : 1° les *multiplications ordinaires*, qui dérivent d'une transformation d'Hermite ; 2° les *multiplications singulières*, qui dérivent d'une de nos transformations singulières.

185. Les relations entre les périodes g, h, g' de multiplication complexe s'obtiennent immédiatement en faisant, dans les relations (2) de la première Partie, $G = g$, $H = h$, $G' = g'$; ce qui donne

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h, & \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', & \mu' = b_1 + b_2 h + b_2 g', \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 g + d_2 h, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 g + c_2 h, \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 h + d_2 g', & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 h + c_2 g'. \end{cases}$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ' conduit aux quatre équations *fondamentales*

$$(A)\quad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0,$$

$$(B)\quad gh a_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + g a_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0,$$

$$(C)\quad gh a_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 + g c_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0,$$

$$(D)\quad h^2 a_1 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

Les a_i, b_i, c_i, d_i sont toujours des entiers, caractéristiques de la transformation employée (1).

186. Les relations (A), (B), (C), (D) ne sont des identités que si $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = b_0 = c_0 = c_1 = c_3 = d_0 = d_1 = d_2 = 0$, et $a_0 = b_1 = d_3 = c_2$; la transformation (1) est alors

$$U = a_0 u, \qquad V = a_0 v,$$

et se réduit à la multiplication ordinaire par un nombre entier.

187. Désignons par A, B, C, D les premiers membres des quatre relations ci-dessus; on a identiquement

$$(3)\quad \begin{cases} A(a_3h + a_2g' + a_1) - B(a_3g + a_2h + a_0) \\ \quad + C(b_3h + b_2g' + b_1) - D(b_3g + b_2h + b_0) \equiv F_1, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} A(a_3h + b_3g' - c_3) + B(a_2h + b_2g' - c_2) \\ \quad - C(a_3g + b_3h - d_3) - D(a_2g + b_2h - d_2) \equiv F_2, \end{cases}$$

étant posé

$$(5)\quad \begin{cases} F_1 = (h^2 - gg')[(ad)_{23} + (bc)_{23}] \\ \quad + g[(ad)_{31} + (bc)_{31}] + g'[(ad)_{02} + (bc)_{02}] \\ \quad + h[(ad)_{03} + (bc)_{03} - (ad)_{12} - (bc)_{12}] + [(ad)_{01} + (bc)_{01}]. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} F_2 = (h^2 - gg')[(ba)_{03} + (ba)_{12}] \\ \quad + g[(ca)_{03} + (ca)_{12}] + g'[(bd)_{03} + (bd)_{12}] \\ \quad + h[(cb)_{03} + (cb)_{12} - (da)_{03} - (da)_{12}] + [(dc)_{03} + (dc)_{12}]. \end{cases}$$

On observera que les relations $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les relations singulières (3 *bis*) et (3) de la première Partie entre les périodes initiales et finales de la transformation; elles ne sont identiquement nulles que si la transformation considérée est ordinaire, et, d'ailleurs, si l'une d'elles est une identité, l'autre l'est également (n° **157**).

Nous dirons que la multiplication complexe considérée *conduit* de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

188. Le problème est maintenant de trouver *a priori* les périodes g, h, g' telles que les relations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ puissent avoir lieu, par un choix convenable des entiers a_i, b_i, c_i, d_i.

189. *Remarque.* — Les termes du second degré en g, h, g', dans les premiers membres des équations (A), (B), (C), (D), peuvent se mettre respectivement sous la forme remarquable suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} b_2(h^2 - gg') + g[a_3g + (a_2 + b_3)h + b_2g'], \\ -a_2(h^2 - gg') + h[a_3g + (a_2 + b_3)h + b_2g'], \\ -b_3(h^2 - gg') + h[a_3g + (a_2 + b_3)h + b_2g'], \\ a_3(h^2 - gg') + g[a_3g + (a_2 + b_3)h + b_2g']. \end{cases}$$

On en conclut que, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre *quadriques* représentées par les équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont en commun, dans le plan de l'infini, les deux points

$$(8) \qquad h^2 - gg' = 0, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0.$$

On reconnaît sans difficulté qu'elles n'ont pas, dans ce plan, d'autre point commun, à moins qu'on n'ait simultanément

$$a_3 = a_2 + b_3 = b_2 = 0.$$

Dans ce cas, les quatre équations (A), (B), (C), (D) sont singulières : les périodes g, h, g' ne sont alors liées que par des relations singulières.

190. Théorème. — *Il y a, entre les périodes de multiplication complexe, au moins une relation singulière (à coefficients entiers).*

Car les relations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $B - C = 0$ sont singulières; le seul cas d'exception possible serait donc celui où ces trois relations seraient des identités.

Or l'identité $B - C \equiv 0$ donne, en particulier, $a_2 = b_3$, $a_1 = -c_3$; et, en faisant $B = C$ dans (4), il vient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & A(a_3 h + a_2 g - c_3) \\ & \quad + B(-a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2) - D(a_2 g + b_2 h - d_2) \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Considérons toujours g, h, g' comme les coordonnées d'un point dans l'espace; les trois plans

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_3 h + a_2 g' - c_3 = 0, \\ & -a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2 = 0, \\ & a_2 g + b_2 h - d_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

se coupent suivant une même droite, car les déterminants du troisième

ordre compris dans la matrice

$$\begin{matrix} 0 & a_3 & a_2 & -c_3 \\ -a_3 & 0 & b_2 & d_3-c_2 \\ a_2 & b_2 & 0 & -d_2 \end{matrix}$$

sont nuls, comme on le reconnaît aisément, en tenant compte de $a_2 = b_3$, et $(ad)_{23}+(bc)_{23}=0$; cette dernière relation tirée de $F_1=0$. Dès lors, l'identité (9) montre que le plan

$$a_2 g + b_2 h - d_2 = 0$$

coupe la quadrique $A=0$ suivant une conique située sur la quadrique $B=0$: les quadriques $A=0$ et $B=0$ se coupent alors suivant une deuxième conique située sur $D=0$.

Le plan, $a_2 g + b_2 h - d_2 = 0$, de la première conique commune à $A=0$ et $B=0$, ayant ses coefficients rationnels en fonction des coefficients des quadriques A et B, il en sera de même du plan de la seconde; c'est-à-dire qu'il existera entre g, h et g' une relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

où les coefficients sont rationnels par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, c'est-à-dire sont des fractions : c'est là une relation singulière entre les périodes, et le théorème est établi.

191. *Remarque*. — On a supposé dans ce raisonnement que les trois plans (10) existent, c'est-à-dire que l'équation d'aucun d'eux n'est une identité. S'il en est autrement, du second par exemple, on aura $a_3=0$, $b_2=0$; et comme $a_2=b_3$, si a_2 était nul, on serait dans le cas signalé au n° **189** et où les périodes ne sont liées que par des relations singulières. Supposons alors $a_2 \gtrless 0$; l'identité (9) devient :

$$A(a_2 g' - c_3) - D(a_2 g - d_2) = 0,$$

d'où l'on conclut, en se reportant à l'expression de A, que A est de la

forme

$$\Lambda = (mh + n)(a_2 g - d_2) = 0,$$

m et n étant entiers, et $m \geq 0$.

On ne saurait avoir $a_2 g - d_2 = 0$, sinon g serait réel et $h_1^2 - g_1 g'_1$ ne serait pas négatif; on a donc

$$mh + n = 0,$$

relation singulière. Un raisonnement analogue s'applique au cas où l'équation d'un des autres plans (10) serait une identité.

Mêmes conclusions, si deux ou trois de ces équations sont des identités.

192. Avant de discuter plus complètement les relations fondamentales (A), (B), (C), (D) entre les périodes de multiplication complexe, nous étudierons les multiplications dans quelques cas particuliers.

Multiplication dans le cas d'une relation singulière.

193. Cette relation pouvant se mettre sous la forme

$$(\mathrm{R}) \qquad g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et étant supposée la seule relation entre g, h, g', il faut que les équations (A), (B), (C), (D) en soient des conséquences, c'est-à-dire, comme on le reconnaît de suite, qu'elles soient du premier degré en g, h, g' et de la forme $g + \beta h + \gamma g'$, à un facteur entier près.

Donc

$$a_3 = a_2 = b_3 = b_2 = 0:$$

puis :

$$\begin{aligned}
\beta(a_0 - d_1) &= b_0 - d_2, \\
\gamma(a_0 - d_3) &= 0, \\
\beta a_1 &= b_1 - d_3, \\
\gamma a_1 &= -d_2, \qquad d_0 = d_1 = c_0 = c_1 = 0, \\
-\beta c_3 &= a_0 - c_2, \\
-\gamma c_3 &= b_0, \\
a_1 - c_3 &= b_1 - c_2 = 0.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\gamma(a_1 - c_3) = b_0 - d_2 = \beta(a_0 - d_3)$$

et en comparant avec $\gamma(a_0 - d_3) = 0$, on voit que nécessairement $a_0 - d_3 = 0$, car β et γ ne peuvent être nuls en même temps.

On a ainsi pour les a_i, b_i, c_i, d_i les valeurs

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{llll} a_0 = a_0, & b_0 = -\gamma c_3, & c_0 = 0, & d_0 = 0, \\ a_1 = c_3, & b_1 = a_0 + \beta c_3, & c_1 = 0, & d_1 = 0, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = a_0 + \beta c_3, & d_2 = -\gamma c_3, \\ a_3 = 0, & b_3 = 0, & c_3 = c_3, & d_3 = a_0, \end{array}\right.$$

et la transformation de multiplication complexe est, en remplaçant par ρ et σ les entiers, *restés arbitraires*, a_0 et c_3 :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} U = \rho u - \gamma\sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v. \end{array}\right.$$

Il est aisé de trouver les *indices* L et K de cette transformation.

On a, par les formules (5) de la première Partie,

$$AK = (ac)_{03} + (ac)_{12} = \sigma(2\rho + \beta\sigma)$$

d'où, puisque A, coefficient de g dans la relation singulière (R), est égal à 1,

$$K = \sigma(2\rho + \beta\sigma).$$

Ensuite

$$L = (ad)_{03} + (ad)_{12} = \rho^2 - \gamma\sigma^2.$$

A un point u, v correspond, par (12), un seul point U, V, et à un point U, V correspondent δ' points u, v, étant posé, comme au n° **141**,

$$\delta' = L^2 + \beta KL + \gamma K^2.$$

En faisant le calcul, on trouve pour le *degré* de la multiplication

considérée

$$\delta = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2.$$

194. *Remarque.* — La transformation (12) n'est ordinaire que si $k = 0$, c'est-à-dire si $\sigma = 0$, ce qui correspond à la multiplication ordinaire par un nombre entier; ou si $2\rho + \beta\sigma = 0$, ce qui donne

$$U = -\tfrac{1}{2}\sigma[\beta u + 2\gamma v], \qquad V = \tfrac{1}{2}\sigma[2u + \beta v];$$

σ désignant un entier tel que $\beta\sigma$ soit pair. C'est là la seule *multiplication complexe ordinaire* dans le cas d'une relation singulière.

Multiplication dans le cas de deux relations singulières.

195. Si les périodes g, h, g' sont liées seulement par deux relations singulières, on peut, en combinant celles-ci linéairement, en déduire une relation, également singulière, où le terme en h ait disparu :

$$Ag + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

L'invariant de cette relation $\Delta(= -4AC - 4DE)$ est divisible par 4; on peut donc (I, n° **13**), par une transformation ordinaire du premier ordre, la ramener au type de même invariant

$$(\Delta) \qquad h^2 - gg' = \frac{\Delta}{4}.$$

La transformation employée change une quelconque des relations singulières primitives en une relation singulière, où l'on peut, en tenant compte de (Δ), faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$. Finalement, on a le droit de supposer que les périodes g, h, g' sont liées par deux relations de la forme

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} h^2 - gg' &= d, \\ \alpha g + \beta h + \gamma g' &= \omega, \end{aligned} \right.$$

d, α, β, ω étant entiers; de plus α, β, γ et ω peuvent être supposés premiers entre eux.

196. *Remarque.* — Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire d, α, β, ω pour que l'inégalité

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$$

puisse être vérifiée; g_1, h_1, g'_1 désignant toujours les parties imaginaires de g, h, g' :

$$(14) \qquad g = g_0 + i g_1, \qquad h = h_0 + i h_1, \qquad g' = g'_0 + i g'_1.$$

En premier lieu, les invariants $4d$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ des deux relations (13) doivent être positifs (I, n° **14**). Remplaçons g, h, g' par leurs valeurs (14) dans les relations (13) et séparons le réel de l'imaginaire, il vient :

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0, \\ \alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1 = 0, \\ 2 h_0 h_1 - g_0 g'_1 - g'_0 g_1 = 0, \\ h_1^2 - g_1 g'_1 - (h_0^2 - g_0 g'_0) + d = 0. \end{cases}$$

Tirons des deux relations intermédiaires les valeurs proportionnelles de g_1, h_1, g'_1 et écrivons que $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif :

$$\omega^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)(h_0^2 - g_0 g'_0) < 0.$$

La quatrième relation donne

$$h_0^2 - g_0 g'_0 - d < 0;$$

d'où, puisque $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0,

$$d > h_0^2 - g_0 g'_0 > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma},$$

on a en outre

$$\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0.$$

Pour qu'on puisse trouver g_0, h_0, g'_0 vérifiant cette égalité et les deux inégalités qui précèdent, il faut que $d > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$; c'est de plus

suffisant, car si l'on regarde g_0, h_0, g'_0 comme les coordonnées d'un point dans l'espace, le plan $\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0$ coupe toujours en des points réels la quadrique $h_0^2 - g_0 g'_0 = \lambda^2$, *qui est un hyperboloïde à une nappe*.

Finalement, pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ *puisse* être négatif, il est *nécessaire* qu'on ait

$$(16) \qquad d > 0, \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \quad \omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) < 0.$$

Sous une autre forme, cela revient à dire que la relation singulière

$$\rho(h^2 - gg' - d) + \sigma(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0,$$

où ρ et σ sont des entiers quelconques, a son invariant positif, quels que soient ρ et σ; cet invariant est, en effet,

$$\sigma^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\rho\sigma\omega - 4\rho^2 d;$$

et cette condition était évidente *a priori*.

197. D'une manière générale, soient

$$F_1 = A g + B h + C g' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$
$$F_2 = A g + B h + C' g' + D(h^2 - gg') + E' = 0,$$

deux relations singulières entre g, h, g'; pour qu'il existe des périodes vérifiant ces relations et l'inégalité $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, il est nécessaire que l'invariant de la relation

$$\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$$

soit positif. Géométriquement, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à dire que le discriminant de la quadrique $\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$ n'est jamais nul pour des valeurs réelles de ρ et σ; cette quadrique ne peut donc appartenir à la variété cône, à moins qu'elle ne se réduise à un plan, c'est-à-dire à moins que les termes en $h^2 - gg'$ ne disparaissent.

Si le terme en $h^2 - gg'$ manque dans F_1 et existe dans F_2, on voit de même que le plan $F_1 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_2 = 0$.

198. Cela posé, reprenons les relations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; elles doivent être des conséquences des deux relations

$$(13) \qquad h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

En regardant toujours g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à écrire que les quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, passent par la conique représentée par les équations (13); par suite, en désignant par θ', α', β', γ', ω', des constantes, on a d'abord, pour la quadrique $A = 0$:

$$\begin{aligned} b_2(h^2 - gg') + g[a_3 g + (a_2 + b_2)h + b_2 g'] \\ + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = \theta'(h^2 - gg' - d) \\ + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(\alpha' g + \beta' h + \gamma' g' - \omega'), \end{aligned}$$

ce qui donne de suite, en supposant $\gamma' \geqq 0$,

$$\gamma' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \theta' = b_2, \qquad \omega' = 0,$$

et il reste

$$(17) \left\{ \begin{aligned} & g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'] + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 \\ & \equiv - b_2 d + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)\alpha' g; \end{aligned} \right.$$

d'où, en identifiant,

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha\alpha', & a_2 + b_3 &= \beta\alpha', & b_2 &= \gamma\alpha', \\ a_0 - d_3 &= -\omega\alpha', & b_0 - d_2 &= 0, & d_0 &= b_2 d. \end{aligned}$$

Les quatre premières de ces relations montrent que α' est un entier, car si c'était une fraction $\frac{p}{q}$, réduite à sa plus simple expression, q devrait diviser α, β, γ et ω, qui sont supposés sans autre diviseur commun

que l'unité. On peut donc écrire, en remplaçant α' par σ,

$$(18)\quad \begin{cases} a_3 = \alpha\sigma, \\ a_2 + b_3 = \beta\sigma, \\ b_2 = \gamma\sigma, \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} a_0 - d_3 + \sigma\omega = 0, \\ b_0 - d_2 = 0, \\ d_0 - db_2 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, en tenant compte de (13) et de (18), l'équation (B) s'écrit

$$-a_2 d + h\sigma\omega + \underline{g}a_1 + h(b_1 - d_3) - \underline{g}' d_2 - d_1 = 0,$$

ce qui doit évidemment être une conséquence de

$$\alpha\underline{g} + \beta h + \gamma\underline{g}' - \omega = 0.$$

Donc, en désignant par ρ un entier

$$(20)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha\rho, \\ b_1 - d_3 + \sigma\omega = \beta\rho, \\ -d_2 = \gamma\rho, \\ d_1 + a_2 d = \omega\rho. \end{cases}$$

En opérant de même pour les équations (C) et (D), et en désignant par ν un entier, il vient :

$$(21)\quad \begin{cases} -c_3 = \alpha\nu, \\ a_0 - c_2 + \sigma\omega = \beta\nu, \\ b_0 = \gamma\nu, \\ c_0 + b_3 d = \omega\nu, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} a_1 - c_1 = 0, \\ b_1 - c_2 + \sigma\omega = 0, \\ c_1 - a_3 d = 0. \end{cases}$$

La relation $a_1 = c_3$ donne $\nu = -\rho$; remplaçant ν par cette valeur et résolvant les équations (18), (19), (20), (21) et (22) par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, on trouve que ces seize entiers s'expriment comme il suit en fonction des entiers ρ, σ et de a_0 et b_3, que nous désignerons par θ et τ:

$$(23)\quad \begin{cases} a_0 = \theta, & b_0 = -\gamma\rho, & c_0 = -\omega\rho - d\tau, & d_0 = \gamma d\sigma, \\ a_1 = \alpha\rho, & b_1 = \theta + \beta\rho, & c_1 = \alpha d\sigma, & d_1 = \omega\rho - \beta d\sigma + d\tau, \\ a_2 = \beta\sigma - \tau, & b_2 = \gamma\sigma, & c_2 = \theta + \omega\sigma + \beta\rho, & d_2 = -\gamma\rho, \\ a_3 = \alpha\sigma, & b_3 = \tau, & c_3 = \alpha\rho, & d_3 = \theta + \omega\sigma. \end{cases}$$

199. *Remarque*. — On a supposé, pour obtenir ces relations, $\gamma \geq 0$; dans le cas contraire, on verrait sans difficulté qu'elles subsistent encore, à condition que les inégalités nécessaires du n° **196** soient vérifiées.

200. Les formules (23) où ρ, σ, θ et τ désignent des *entiers quelconques* résolvent le problème en donnant les nombres caractéristiques des multiplications complexes cherchées; les transformations correspondantes sont données par les formules (1) et (2):

$$(24)\quad \begin{cases} U = (a_0 + a_3 g + a_2 h)u + (b_0 + b_3 g + b_2 h)v, \\ V = (a_1 + a_3 h + a_2 g')u + (b_1 + b_3 h + b_2 g')v. \end{cases}$$

201. La multiplication n'est qu'une transformation qui conduit des périodes g, h, g' aux mêmes périodes g, h, g'; d'après la théorie générale de la transformation et le n° **187**, g, h et g', considérées comme périodes *finales*, vérifient la relation (6), $F_2 = 0$ de ce numéro, laquelle est de la forme

$$(25)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

De même g, h, et g', considérées comme périodes *initiales*, vérifient la relation analogue (5), $F_1 = 0$:

$$(26)\qquad A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0.$$

Calculons A, B, C, D, E pour la multiplication (23). On a, en désignant par K l'indice de cette multiplication,

$$AK = (ac)_{01} + (ac)_{12} = \alpha(2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma - \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2),$$

$$DK = (ab)_{01} + (ab)_{12} = 2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta.$$

Il est inutile de calculer BK, CK, EK, car la relation (25) est nécessairement de la forme

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

où m et n désignent des entiers; on voit ainsi que la relation *finale*, $F_2 = 0$, entre g, h, g' est

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)[2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta] \\ &\quad - (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)[2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma - \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

On trouverait de même pour la relation *initiale*, $F_1 = 0$,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)(2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau) \\ &\quad + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + d\beta\sigma^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

202. *Degré.* — Le *degré* de la transformation, c'est-à-dire le nombre des points u, v qui répondent à un point U, V est égal (n° **141**) au déterminant des nombres a_i, b_i, c_i, d_i; on trouve, pour sa valeur,

$$[\theta^2 + \theta(\beta\rho - \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - d\alpha\gamma\sigma^2]^2.$$

203. *Remarque.* — La multiplication considérée ne sera ordinaire (n° **184**) que si la relation (27) est une identité; en ce cas, la relation (28) en sera une également.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\sigma\rho + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta = 0, \\ &2\theta\rho + 2d\sigma\tau - 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - d\beta\sigma^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Tirons τ de la première de ces relations et portons dans la seconde : il vient, en supposant $2\theta + \beta\rho = 0$,

$$\rho\{(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)^2 + \sigma^2[d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - \omega^2]\} = 0.$$

D'après les inégalités du n° **196**, la quantité entre crochets est une somme de carrés; elle ne peut dès lors être nulle que si $\sigma = 0$, $2\theta + \beta\rho = 0$, cas écarté : on a donc $\rho = 0$, ce qui donne ensuite, par (29),

$$\theta(2\tau - \beta\sigma) = 0, \qquad d\sigma(2\tau - \beta\sigma) = 0;$$

d'où

$$2\tau - \beta\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = \sigma = 0.$$

Enfin, si $2\theta + \beta\rho = 0$, les relations (29) donnent

$$\rho\sigma(\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0, \qquad \sigma(2d\tau + 2\omega\rho - \beta d\sigma) = 0;$$

d'où les solutions

$$\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho = 2\tau - \beta\sigma = 0.$$

Finalement, pour que la multiplication définie par les entiers (23) soit ordinaire, il faut et il suffit que soit vérifiée une des hypothèses suivantes :

1° $\qquad \rho = 2\tau - \beta\sigma = 0,$

2° $\qquad \sigma = 2\theta + \beta\rho = 0.$

La multiplication ordinaire par un nombre entier, θ, correspond à $\rho = \sigma = \tau = 0$ (n° **186**).

204. Conformément au langage que nous avons adopté (n° **187**), nous disons que la multiplication complexe définie par les entiers (23) a_i, b_i, c_i, d_i *conduit* de la relation singulière (28) à la relation singulière (27). Proposons-nous de rechercher les multiplications qui conduisent d'une relation à la même.

Soit

$$(30) \qquad m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

cette relation, m et n désignant des entiers quelconques; pour que les relations initiale et finale (28) et (27) soient identiques à (30), il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} m &= 2\theta\tau + (2\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta \\ n &= 2\theta\sigma + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2 \\ &= 2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau \\ &\quad 2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2 \end{aligned}.$$

On met aisément ces équations sous la forme :

$$(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)[n(2\tau - \beta\sigma) - 2m\rho] = 0,$$

$$\sigma(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0.$$

On y satisfait de quatre manières :

1° $\sigma = 0, \qquad 2\theta + \beta\rho = 0;$

2° $\sigma = 0, \qquad n\tau - m\rho = 0;$

3° $(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$

$$n(2\tau - \beta\sigma) - 2m\rho = 0;$$

4° $(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$$

205. Examinons successivement ces quatre hypothèses :

1° $\sigma = 0$ et $2\theta + \beta\rho = 0$ donne (n° **205**) une transformation ordinaire qu'on devait évidemment rencontrer, puisqu'en ce cas les premiers membres des relations initiale et finale, étant identiquement nuls, sont identiques entre eux.

2° $\sigma = 0$ et $n\tau - m\rho = 0$ donne une transformation singulière : on reconnaît aisément qu'on trouve ainsi les multiplications singulières répondant au cas où g, h et g' seraient liées *uniquement* par la relation $m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$.

3° Des deux équations

$$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$

$$(2\tau - \beta\sigma)n \qquad - \rho.2m \qquad = 0,$$

on déduit

$$2\tau - \beta\sigma = 0, \qquad \rho = 0,$$

transformation ordinaire (n° **203**). Cela suppose toutefois que le déterminant

$$-2m(2md + n\omega) - n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - 2\omega mn$$

n'est pas nul. Cette quantité s'écrit, en changeant le signe,

$$n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\omega mn + 4m^2 d;$$

elle ne peut s'annuler pour aucun système de valeurs de m et n (autre que 0,0), car $\omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ est négatif (n° **196**).

4° C'est ce cas qui donne des multiplications singulières nouvelles, conduisant d'une relation singulière à la même relation; il est caractérisé par la condition

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

σ étant $\gtrless 0$, et aussi ρ et $2\tau - \beta\sigma$ n'étant pas nuls simultanément. Si ρ, σ, θ et τ sont des entiers quelconques satisfaisant à ces conditions, la multiplication dont les entiers caractéristiques sont donnés par les formules (23) conduira de la relation

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

à la même relation; m et n étant définis par l'équation

$$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{m}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)\rho + \omega(2\tau - \beta\sigma)} = \frac{n}{-2\omega\rho - 2d(2\tau - \beta\sigma)}.$$

206. *Corollaire.* — Étant donnée une relation initiale (30), on peut toujours trouver une multiplication conduisant de cette relation à une relation *différente*; car il suffit que ρ, σ, θ, τ soient choisis de manière à vérifier

$$\frac{m}{n} = \frac{2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau}{2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + \beta d\sigma^2},$$

et de telle sorte que ni σ, ni ρ, ni $2\theta + \beta\rho + \omega\sigma$ ne soient nuls : ce choix est évidemment possible.

207. *Composition de deux multiplications.* — Si nous effectuons successivement deux multiplications, définies respectivement par les valeurs ρ, σ, θ, τ et ρ', σ', θ', τ' des entiers qui figurent dans les formules (23), nous obtenons une multiplication du même type (23), pour laquelle les entiers correspondants seront ρ'', σ'', θ'', τ''. On obtient leurs valeurs sans difficulté en partant des formules du n° **146** relatives à la composition de deux transformations; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\rho'' &= \rho\theta' + \theta\rho' + \beta\rho\rho' - d(\sigma\tau' - \sigma'\tau) + \omega\rho\sigma',\\
\sigma'' &= \sigma\theta' + \theta\sigma' + \tau\rho' - \rho\tau' + \beta\rho\sigma' + \omega\sigma\sigma',\\
\theta'' &= \theta\theta' - \alpha\gamma\rho\rho' + \alpha\gamma d\sigma\sigma' - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma' - \tau'),\\
\tau'' &= \theta\tau' + \tau\theta + \alpha\gamma(\rho\sigma' - \sigma\rho') + \beta\tau\rho' + \omega\sigma\tau'.
\end{aligned}$$

208. On déduit de ces formules une conséquence arithmétique intéressante.

Posons, pour simplifier,

$$\begin{aligned}
\xi &= 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma,\\
\eta &= 2\tau - \beta\sigma;
\end{aligned}$$

les entiers ξ et η remplaçant θ et τ. On trouve, en appelant ξ'' et η'' les quantités $2\theta'' + \beta\rho'' + \omega\sigma''$ et $2\tau'' - \beta\sigma''$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
2\xi'' &= \xi\xi' + d\eta\eta' + \Delta\rho\rho' + (\omega^2 - d\Delta)\sigma\sigma' + \omega(\rho\eta' + \rho'\eta),\\
2\eta'' &= \xi\eta' + \xi'\eta - \omega(\sigma'\eta - \sigma\eta') + \Delta(\sigma\rho' - \sigma'\rho),\\
2\rho'' &= \rho\xi' + \rho'\xi + \omega(\rho\sigma' - \sigma\rho') + d(\sigma'\eta - \sigma\eta'),\\
2\sigma'' &= \sigma\xi' + \sigma'\xi + \rho'\eta - \rho\eta',
\end{aligned}\right.$$

en écrivant $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta$.

Maintenant observons que le degré de la transformation composée est le produit des degrés des transformations composantes; ce degré, pour la transformation ξ, η, ρ, σ, s'écrit, en vertu de la formule du

n° **202**,

$$\frac{1}{16}[\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2]^2.$$

On aura donc

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &[\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2] \\ &\times[\xi'^2 - d\eta'^2 - 2\omega\rho'\eta' - \Delta\rho'^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma'^2] \\ &= 4[\xi''^2 - d\eta''^2 - 2\omega\rho''\eta'' - \Delta\rho''^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma''^2], \end{aligned}\right.$$

en désignant par ξ, η, ρ, σ; ξ', η', ρ', σ' des entiers quelconques, et ξ'', η'', ρ'', σ'' étant définis par les formules (31). On aurait dû écrire $\pm$ devant le second membre de (32), mais on reconnaît de suite que l'identité des deux membres exige le signe $+$. On a ainsi une propriété curieuse de la forme quaternaire

$$\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2.$$

209. *Carré d'une multiplication.* — Si l'on fait dans les formules précédentes $\rho' = \rho$, $\sigma' = \sigma$, $\theta' = \theta$, $\tau' = \tau$, il vient

$$\begin{aligned} \rho'' &= \rho(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \sigma'' &= \sigma(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \tau'' &= \tau(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \theta'' &= \theta^2 - \alpha\gamma\rho^2 + \alpha\gamma d\sigma^2 - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma - \tau). \end{aligned}$$

Comme conséquence, on voit que si la multiplication considérée est une de celles du type 4° du n° **205**, conduisant d'une relation singulière à la même relation, ρ'', σ'' et τ'' sont nuls, puisque

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$$

Le carré d'une telle multiplication est donc une multiplication ordinaire par un nombre entier (n° **205**); cet entier est θ''.

Si l'on désigne par D^2 le degré de la multiplication considérée (n° **202**)

$$D = \theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - \alpha\gamma d\sigma^2.$$

on a

$$D + \theta = (2\theta + 3\rho + \omega\sigma)\theta = 0.$$

Ainsi

$$\theta = -D.$$

Multiplication dans le cas elliptique.

210. Supposons les périodes g, h, g' liées par une relation singulière d'invariant carré parfait n^2, et par une ou deux autres relations. Si la relation singulière était la seule liant les périodes, on rentrerait dans un cas examiné (n° **195**).

On peut ramener la relation singulière à la forme $nh - 1 = 0$ (I, n° **15**); remplaçons h par $\frac{1}{n}$ dans les quatre équations fondamentales de la multiplication complexe, celles-ci deviennent :

$$(A)\quad n^2 a_3 g^2 + n[a_2 + b_3 + n(a_0 - d_3)]g + b_2 + n(b_0 - d_2) - n^2 d_0 = 0,$$

$$(B)\quad n^2 a_2 gg + n[a_3 + na_1]g + n[b_2 - nd_2]g' + b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0,$$

$$(C)\quad n^2 b_3 gg + n[a_3 - nc_3]g + n[b_2 + nb_0]g' + a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0,$$

$$(D)\quad n^2 b_2 g'^2 + n[a_2 + b_3 + n(b_1 - c_2)]g' + a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0.$$

En tenant compte de $h^2 = \frac{1}{n^2}$, les équations (B) et (C) sont singulières, car $gg' = (gg' - h^2) + \frac{1}{n^2}$; si donc (A) et (D) sont des identités, on retombe dans le cas où g, h, g' ne sont liées que par des relations singulières.

Si (A), par exemple, n'est pas une identité, et si (B) ou (C) n'en est pas une, les périodes sont encore liées par trois relations singulières; car (B) donne

$$g = \frac{\rho g' + \tau}{\rho' g' + \sigma'},$$

les ρ et τ étant entiers, et si nous portons cette valeur dans (A), nous trouvons

$$n^2 a_3 g \frac{\rho g' + \tau}{\rho' g' + \sigma'} + Mg + P = 0.$$

relation de la forme

$$M_1 gg' + N_1 g + P_1 g' + Q_1 = 0,$$

c'est-à-dire singulière, en raison de $h^2 = \frac{1}{n^2}$.

Donc, pour échapper au cas de relations uniquement singulières, il faut que (B) *et* (C) soient des identités, et que (A) ou (D) n'en soit pas une. Or (A), par exemple, est de la forme

$$Mg^2 + Ng + P = 0,$$

M, N, P étant entiers : si l'on se reporte au tableau des périodes :

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g', \end{matrix}$$

on voit que le couple $\left(g, \frac{1}{n}\right)$ est un couple de périodes elliptiques de multiplication complexe, c'est-à-dire que l'un des deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se réduisent les fonctions abéliennes considérées possède une multiplication complexe.

Même conclusion si (D) n'est pas une identité.

Il est aisé de trouver les multiplications relatives à ces cas.

211. Supposons d'abord que (A) n'est pas une identité et que (D) en est une; en écrivant que $(D) \equiv (B) \equiv (C) \equiv 0$, on a :

$$\begin{matrix} b_2 = 0, & a_4 + b_3 + n(b_1 - c_2) = 0, & a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0, \\ a_2 = 0, & a_3 + na_4 = 0, & b_2 - nd_2 = 0, & b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0, \\ b_3 = 0, & a_3 - nc_3 = 0, & b_2 + nb_0 = 0, & a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0, \end{matrix}$$

ce qui donne

$$(33) \quad \left\{ \begin{matrix} a_2 = b_2 = b_3 = b_0 = d_2 = 0, & a_3 = -n^2 c_1, & b_1 = c_2, & a_4 = nc_1, \\ & c_3 = -nc_1, & a_0 = c_2 + nc_0, & d_3 = c_2 - nd_1. \end{matrix} \right.$$

La période g vérifie (A), c'est-à-dire une relation quadratique de la forme

$$(34) \qquad n^2 m g^2 + n p g + q = 0,$$

m, p, q étant entiers sans diviseur commun.

Écrivons que (A) est identique à (34), à un facteur près, il vient, en tenant compte de (33),

$$c_1 = -\rho m, \qquad c_0 + d_1 = \rho p, \qquad d_0 = -\rho q,$$

ρ désignant un entier; et finalement les entiers caractéristiques de la multiplication complexe cherchée sont donnés par les formules :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{llll} a_0 = c_2 + n c_0, & b_0 = 0, & c_0 = c_0, & d_0 = -\rho q, \\ a_1 = -n\rho m, & b_1 = c_2, & c_1 = -\rho m, & d_1 = -c_0 + \rho p, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = c_2, & d_2 = 0, \\ a_3 = n^2 \rho m, & b_3 = 0, & c_3 = n\rho m, & d_3 = c_2 + n c_0 - n\rho p; \end{array} \right.$$

ρ, c_0, c_2 sont des entiers arbitraires.

Le *degré* de cette multiplication complexe, égal au déterminant des a_i, b_i, c_i, d_i (n° **141**), est

$$c_2^2 [(c_2 + n c_0)^2 - n p \rho (c_2 + n c_0) + n^2 m q \rho^2]$$

quantité toujours positive, car $p^2 - 4mq$ doit être < 0, pour que g, donné par (34), soit imaginaire.

Remarque. — En vertu de ce qui précède, si les équations (A), (B), (C), (D) établissent entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait et *deux* autres relations, une de celles-ci ne pourra être singulière sans que l'autre le soit également.

212. On trouverait de même sans difficulté les formules qui répondent au cas où (D) seul ne serait pas une identité, et à celui où (A) et (D) ne seraient pas simultanément des identités.

Multiplication dans le cas de trois relations singulières.

213. Les trois relations peuvent (n° **195**) être réduites aux formes

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h = \omega, \qquad \beta' h + \gamma' g' = \omega\,;$$

les deux dernières ont leur invariant carré parfait.

On peut alors ramener l'une d'elles au type $nh - 1 = 0$; les deux autres seront des formes

$$A\,gg' + B\,g + C\,g' + D = 0,$$
$$A_1 gg' + B_1 g + C_1 g' + D = 0.$$

En tirant g' de la dernière pour porter dans la précédente, on voit que g vérifie une relation quadratique $Mg^2 + Ng + P = 0$ à coefficients entiers, et il en est de même de g'.

On retombe donc sur le cas elliptique où les deux systèmes de fonctions elliptiques correspondantes ont une multiplication complexe; mais, outre les relations quadratiques que vérifient g et g', il y a de plus une relation $Agg' + Bg + Cg' + D = 0$, qui n'existe pas en général dans le cas précédent.

Nous n'indiquerons pas les formules de multiplication complexe relatives au cas de trois relations singulières; on les obtiendrait sans difficulté en imitant la marche déjà suivie.

Multiplication complexe, en général.

214. Revenons au cas général de la multiplication complexe, c'est-à-dire à la discussion des équations fondamentales (A), (B), (C), (D) du n° **185** :

$$\text{(A)}\quad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0,$$
$$\text{(B)}\quad gha_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0,$$
$$\text{(C)}\quad gha_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0,$$
$$\text{(D)}\quad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g(b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

Nous avons établi (n° **190**) que ces relations entraînent au moins une relation singulière entre g, h et g'.

Distinguons maintenant plusieurs cas.

215. I. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à une seule, laquelle, par ce qui vient d'être dit, est nécessairement une relation singulière; nous avons appris à former (n^{os} **193-194**) les multiplications complexes correspondantes.

216. II. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à deux : géométriquement, c'est dire que, en regardant g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont une ligne commune. On peut supposer que cette ligne est une droite ou une conique (véritable ou décomposée) : les relations (A), (B), (C), (D) entraînent en effet entre g, h, g' au moins une relation singulière qui, par une transformation du premier ordre, peut être ramenée à la forme linéaire en g, h, g'.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une droite, celle-ci a deux équations du type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0, \qquad \alpha_1 g + \beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

les α, β, γ, ω étant rationnels par rapport aux coefficients des surfaces, c'est-à-dire étant des entiers : les périodes g, h, g' sont alors uniquement liées par deux relations singulières.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une conique, elle ne peut avoir comme points à l'infini que les deux points

$$h^2 - gg' = 0, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0.$$

En effet, en dehors du cas signalé au n° **189** et où toutes les relations entre les périodes sont encore singulières, ces points sont les seuls communs à l'infini aux quatre quadriques (n° **189**).

Deux cas sont alors à distinguer selon que la conique passe par ces deux points, ou qu'elle passe par un seul en y touchant alors le plan de l'infini. Dans le premier cas, le plan de la conique a une équation de la forme

$$a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = \omega,$$

ω étant une fraction, et en tenant compte de cette relation entre les périodes, les quatre relations (A), (B), (C), (D) deviennent singulières, comme le montrent les formes (7) des termes du plus haut degré dans ces équations.

Par suite, dans ce premier cas, g, h et g', qui sont, par hypothèse, simplement indéterminés, sont liés uniquement par deux relations singulières.

Dans le second cas, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

le plan de la conique; α, β, γ, ω étant des fractions ou, si l'on veut, des entiers. Il faut, en vertu de l'hypothèse, que, dans le plan de l'infini, les droites $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, $a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0$ se coupent sur la conique $h^2 - gg' = 0$; l'un des points où la première droite coupe la conique ayant ainsi ses coordonnées fractionnaires, il en est de même du second, ce qui exige que la quantité $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ soit un carré. En d'autres termes, il existe entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait, qu'on peut ramener au type $nh - 1 = 0$, et l'on retombe (n° **210**) soit sur le cas d'une seconde relation singulière, examiné aux n^{os} **195-209**, soit sur le cas où g (ou g') vérifie une relation du deuxième ordre à coefficients entiers; c'est le cas de multiplication elliptique complexe étudié au n° **211**.

217. III. Les quatre quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont un nombre fini de points communs, c'est-à-dire que g, h, g' sont liés par *trois* relations.

Je dis que, dans ce cas, il existe entre les périodes *une* ou *trois* relations singulières; ou encore, puisqu'il y a une relation singulière au moins, je dis que les équations (A), (B), (C), (D) ne peuvent entraîner deux relations singulières sans en entraîner une troisième, distincte des deux premières.

Le théorème est vrai si l'une des relations singulières de l'hypothèse a un invariant carré parfait (n° **211**, *Remarque*); nous aurons donc, dans ce qui suit, le droit de supposer qu'on est en dehors du cas elliptique.

Distinguons maintenant trois cas :

218. 1° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière entre g, h, g' à une relation singulière différente : cela revient à dire que les expressions F_1 et F_2 du n° **187** ne sont pas identiquement nulles et sont linéairement distinctes.

Effectuons une transformation ordinaire du premier ordre, de manière à faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$ dans la relation $F_2 = 0$; je dis que le terme analogue ne disparaîtra pas dans $F_1 = 0$. Sinon, en éliminant g' entre $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, on trouverait une relation singulière du type $Mg + Nh + P = 0$, d'invariant carré parfait N^2, ce qui est contraire à l'hypothèse (n° **217**).

Considérons maintenant les identités (3) et (4) du n° **187** :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A(a_3h + a_2g + a_1) - B(a_3g + a_2h + a_0)\\ &+ C(b_3h + b_2g + b_1) - D(b_3g + b_2h + b_0) = F_1,\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A(a_3h + b_3g' - c_3) + B(a_2h + b_2g' - c_2)\\ &- C(a_3g + b_3h - d_3) - D(a_2g + b_2h - d_2) = F_2.\end{aligned}\right.$$

Entre ces deux identités, éliminons D; il vient une relation de la forme

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &AP_1 + BP_2 + CP_3\\ &= F_1(a_2g + b_2h - d_2) - F_2(b_3g + b_2h + b_0)\end{aligned}\right.$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &= -(a_3h + a_2g + a_1)(a_2g + b_2h - d_2)\\ &\quad - (a_3h + b_3g' - c_3)(b_3g + b_2h + b_0),\\ P_2 &= -(a_3g + a_2h + a_0)(a_2g + b_2h - d_2)\\ &\quad - (a_2h + b_2g' - c_2)(b_3g + b_2h + b_0),\\ P_3 &= (b_3h + b_2g + b_1)(a_2g + b_2h - d_2)\\ &\quad + (a_3g + b_3h - d_3)(b_3g + b_2h + b_0).\end{aligned}$$

En développant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}
P_1 &= Cb_3 - Ba_2 + h[(ba)_{03} + (ba)_{12} + (ad)_{32} + (bc)_{12}] \\
&\qquad + (cb)_{03} + (ad)_{12}, \\
P_2 &= Aa_2 + Cb_2 + g[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + (ad)_{20} + (bc)_{20}, \\
-P_3 &= Ab_3 + Bb_2 + g[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + (db)_{12} + (db)_{01},
\end{aligned}$$

de sorte que l'identité (36) prend la forme

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}A\left(\frac{\partial F_2}{\partial h} - \frac{\partial F_1}{\partial h}\right) + B\frac{\partial F_1}{\partial g'} + C\frac{\partial F_2}{\partial g'} \\
&\qquad = F_1(a_2 g + b_2 h + d_2) + F_2(b_3 g + b_2 h + b_0).
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, observons que $B - C = 0$ est une relation singulière entre g, h, g', dont le premier membre est une combinaison linéaire de F_1 et de F_2; sinon les périodes seraient liées par trois relations singulières et le théorème à démontrer serait établi. On peut alors, en posant pour abréger

$$\Phi = F_2 - F_1,$$

écrire l'identité (37)

$$(38)\qquad \tfrac{1}{2}A\Phi_h + C\Phi_g = F_1R_1 + F_2R_2,$$

R_1 et R_2 étant linéaires en g, h, g'.

En éliminant A au lieu de D entre les identités (3) et (4), on trouve de même

$$(39)\qquad \tfrac{1}{2}D\Phi_h + C\Phi_g = F_1R_1 + F_2R_2.$$

Comme F_1 contient un terme en $h^2 - gg'$ et que F_2 n'en contient pas, $\Phi(= F_2 - F_1)$ n'est pas identiquement nul, et même Φ'_g, Φ'_h, $\Phi'_{g'}$ ne sont pas des constantes.

Les surfaces (quadrique et plan) $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ se coupent suivant une conique qui rencontre en *deux* points, *à distance finie*, le plan $\Phi_h = 0$. En effet : 1° le plan $\Phi_h = 0$ ne peut coïncider avec le plan $F_2 = 0$ de la conique, car Φ_h ne contient que h, tandis que F_2 doit contenir des termes en g et g', pour que l'invariant de la relation

singulière $F_2 = 0$ ne soit pas carré parfait : 2° la conique ne rencontre pas le plan $\Phi_h = 0$ à l'infini, c'est-à-dire qu'aucun des points à l'infini $h^2 - gg = 0$, $h = 0$, n'est sur le plan $F_2 = 0$, car il faudrait pour cela que F_2 ne contînt pas de termes en g (ou en g'), et l'invariant correspondant serait encore carré parfait.

Je dis maintenant que les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi_h = 0$ sont situés sur la quadrique $C = 0$. Si l'un d'eux, en effet, n'était pas sur C, il serait, en vertu des identités (38) et (39), sur les plans $\Phi'_g = 0$ et $\Phi'_{g'} = 0$. En d'autres termes, le point

$$\Phi'_h = \Phi'_g = \Phi'_{g'} = 0,$$

qui est le centre de $\Phi = 0$, serait sur la conique commune à $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, donc sur $\Phi = 0$. Or cela est impossible, car la quadrique $\Phi = 0$, contenant des termes du second ordre dans son équation, ne peut appartenir à la variété cône (n° **197**).

Donc les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi_h = 0$ sont sur la quadrique $C = 0$; donc les deux autres points où cette conique coupe $C = 0$ sont, d'après (38) et (39), sur $A = 0$ et sur $D = 0$. En d'autres termes (puisque $B = C = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$), les quadriques $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ n'ont à distance finie que deux points communs [1], c'est-à-dire [en vertu de (3) et (4)] que les quadriques (A), (B), (C), (D) se coupent, à distance finie, en deux points, situés sur la quadrique proprement dite $F_1 = 0$. La droite qui joint ces deux points a les coefficients de ses équations rationnels en fonction de ceux des équations (A), (B), (C), (D), c'est-à-dire entiers, et il y a entre les périodes, outre la relation singulière du second ordre $F_1 = 0$, deux autres relations singulières (puisque linéaires).

On complète ce raisonnement en observant que la droite dont on vient de parler ne saurait être sur la quadrique $F_1 = 0$; elle est en

[1] A moins que la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ne soit tout entière située sur $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$; en ce cas, contrairement à l'hypothèse, les quatre dernières quadriques auraient une courbe commune.

effet dans le plan $F_2 = 0$ qui contient les deux points communs à (A), (B), (C), (D) à distance finie, et l'on a vu (n° **197**) que le plan $F_2 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_1 = 0$.

219. 2° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière à la même relation, $F_1 = 0$.

Soit

$$(40) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

cette multiplication.

Par hypothèse, il y a entre les périodes deux relations singulières, qui peuvent être supposées (n° **195**) de la forme

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

Parmi les multiplications complexes déduites de ces deux relations, considérons-en une qui conduise de la relation singulière $F_1 = 0$ à une relation singulière différente $F_2 = 0$ (n° **206**) :

$$(40\ bis) \qquad u = \lambda_1 u + \mu_1 v', \qquad v = \lambda_2 u' + \mu_2 v'.$$

Il est clair que la transformation composée de (40) et (40 *bis*)

$$(41) \qquad \begin{cases} U = \lambda(\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu(\lambda_2 u + \mu_2 v'), \\ V = \lambda'(\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu'(\lambda_2 u + \mu_2 v'), \end{cases}$$

sera encore une multiplication complexe, et qu'elle conduira de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

En vertu de ce qui précède, si l'existence de cette nouvelle multiplication détermine complètement g, h et g', il y a entre ces périodes une troisième relation singulière et le théorème est établi ; si g, h et g' ne sont pas déterminés, c'est que la multiplication nouvelle est une de celles formées aux n°s **195-209** et qui se déduisent de l'existence de deux relations singulières entre les périodes.

On a ainsi, pour la transformation (40 *bis*), d'après les formules ordinaires de la transformation :

$$\lambda_1 = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad \lambda_2 = a_1 + a_3 h + a_2 g;$$
$$\mu_1 = b_0 + b'_3 g + b'_2 h, \qquad \mu_2 = b_1 + b'_3 h + b'_2 g;$$

les a_i et b_i étant donnés par les formules (23) où l'on écrit $\rho, \sigma, \theta, \tau'$ à la place de $\rho, \sigma, \theta, \tau$. De même pour la transformation (41) :

$$(41\ bis)\qquad \begin{cases} \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 = a_0 + a_3 g + a_2 h, \\ \lambda\mu_1 + \mu\mu_2 = b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda'\lambda_1 + \mu'\lambda_2 = a_1 + a_3 h + a_2 g', \\ \lambda'\mu_1 + \mu'\mu_2 = b_1 + b_3 h + b_2 g; \end{cases}$$

les a_i et b_i étant donnés par les formules (23). En portant dans ces équations les valeurs ci-dessus de $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, on en déduit les valeurs de $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$: or, à l'aide des relations

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega,$$

et des expressions des a_i, b_i, a'_i, b'_i en fonction des $\rho, \sigma, \theta, \tau; \rho', \ldots, \tau'$, on trouve

$$\lambda = mg + nh + p,$$
$$\mu = m'g + n'h + p',$$

m, n, p, m', n', p' étant fractionnaires; on a des expressions analogues pour λ' et μ'.

Les deux premières relations (41 *bis*), mises alors sous la forme

$$a_3(\lambda g + \mu h) + a_2(\lambda h + \mu g) = m_1 g + n_1 h + p_1,$$
$$b'_3(\lambda g + \mu h) + b_2(\lambda h + \mu g') = m_1 g + n_1 h + p_1,$$

donnent aussi, pour $\lambda g + \mu h$ et $\lambda h + \mu g$, des expressions linéaires, à coefficients fractionnaires, en g et h; et l'on obtient un résultat semblable pour $\lambda' g + \mu' h$ et $\lambda' h + \mu' g'$.

Il faut maintenant écrire, pour que (40) soit une multiplication complexe, que λ et λ'; μ et μ'; $\lambda g + \mu h$ et $\lambda' g + \mu' h$; $\lambda h + \mu g$ et $\lambda' h + \mu' g'$ sont des périodes; d'après ce qui précède, on n'est conduit ainsi à écrire que des relations *linéaires* entre g, h et g'. Si ce sont des identités ou des conséquences de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, la multiplication complexe considérée (40) ne suppose entre g, h et g' que les deux relations singulières de l'hypothèse; si l'une, au moins, n'est pas une identité, ou une conséquence de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, c'est qu'il y a, entre les périodes, trois relations singulières. C. Q. F. D.

220. 3° La transformation de multiplication complexe considérée est ordinaire : il suffit de la faire suivre d'une multiplication singulière du premier degré, déduite de l'existence des deux relations singulières admises, pour rentrer dans un des cas précédents.

221. Ainsi, dans le cas où les périodes g, h, g' sont déterminées complètement par les équations fondamentales de la multiplication complexe, il y a entre elles une ou trois relations singulières.

S'il n'y en a qu'une et si son invariant est carré parfait, il résulte du n° **210** que g et g' vérifient chacun une relation quadratique à coefficients entiers, c'est-à-dire que les deux systèmes de fonctions elliptiques par lesquelles s'expriment les fonctions abéliennes considérées possèdent chacun une multiplication complexe.

Si l'invariant n'est pas carré parfait, on a un cas nouveau qui sera examiné plus loin.

222. *Conclusion.* — En résumé, cette discussion prouve qu'il ne peut y avoir de multiplication complexe que dans les cinq cas suivants :

1° Les périodes g, h, g' sont liées uniquement par une relation singulière;

2° et 3° Elles sont liées uniquement par deux ou trois relations singulières;

4° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant carré parfait, et les deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se ramènent alors les fonctions abéliennes possèdent l'un ou l'autre, ou tous deux, une multiplication elliptique complexe;

5° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant non carré parfait et par deux autres relations non singulières.

Les quatre premiers cas ont été étudiés précédemment : il ne nous reste à examiner que le cinquième.

Dernier cas de multiplication abélienne complexe.

223. Nous ferons deux hypothèses, selon que l'invariant de la relation singulière qui lie les périodes est pair ou impair.

Première hypothèse. — *Invariant pair.*

224. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme

$$g = cg'$$

c étant un entier positif, puisque l'invariant $4c$ doit être > 0. Reprenons maintenant les équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe, et faisons-y $g = cg'$. Les résultats obtenus dans B et C doivent être identiques, car $B - C = 0$ étant une relation singulière est, soit une identité, soit une conséquence de $g - cg' = 0$.

Voici ce que deviennent les quatre équations, quand on y fait la substitution indiquée :

$$\begin{aligned}
&(A) \quad a_4 c^2 g'^2 + (a_2 + b_3) cg'h + b_2 h^2 + c(a_0 - d_3) g' + (b_0 - d_2) h - d_0 = 0,\\
&(B) \quad a_2 c^2 g'^2 + (a_3 c + b_2) g'h + b_3 h^2 + (ca_1 - d_2) g' + (b_1 - d_3) h - d_1 = 0,\\
&(C) \quad b_4 c^2 g'^2 + (a_3 c + b_2) g'h + a_2 h^2 + (b_0 - cc_3) g' + (a_0 - c_2) h - c_0 = 0,\\
&(D) \quad b_2 g'^2 + (a_2 + b_3) g'h + a_3 h^2 + (b_1 - c_2) g + (a_1 - c_3) h - c_1 = 0.
\end{aligned}$$

Écrivons que les deux expressions intermédiaires sont identiques : il vient

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} &a_2 = b_3, \qquad ca_1 - d_2 = b_0 - cc_3;\\ &b_1 - d_3 = a_0 - c_2, \qquad c_0 = d_1. \end{aligned} \right.$$

Observons encore que (A) et (D) doivent être identiques à un facteur près; en multipliant en effet (D) par $-c$ et ajoutant à (A), on obtient la relation

$$\begin{aligned} 0 = {} & h^2(b_2 - a_3 c) + cg'^2(a_3 c - b_2) + g'c[a_0 - d_3 - b_1 + c_2] \\ & + h[b_0 - d_2 - ca_1 + cc_3] - d_0 + cc_1. \end{aligned}$$

Comme $cg'^2 = gg'$, on voit que c'est une relation *singulière*, et puisque $g = cg'$ est la seule relation possible de cette nature, il faut que l'on ait

$$(43) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} b_2 = a_3 c, & a_0 - d_3 = b_1 - c_2, \\ b_0 - d_2 = c(a_1 - c_3), & d_0 = cc_1. \end{array} \right.$$

Ces équations, combinées avec les équations (42), donnent l'ensemble des relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i :

$$(44) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_2 = b_3, & a_0 = b_1, & b_0 = ca_1, & c_0 = d_1; \\ b_2 = a_3 c, & d_3 = c_2, & d_2 = cc_3, & d_0 = cc_1. \end{array} \right.$$

225. Cela posé, il ne subsiste, entre h et g', que les équations (D) et (C), qui, en tenant compte des relations (44), s'écrivent

$$(45) \quad ca_3 g'^2 + 2b_3 g'h + a_3 h^2 + (b_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0,$$

$$(46) \quad cb_3 g'^2 + 2ca_3 g'h + b_3 h^2 + c(a_1 - c_3)g' + (b_1 - c_2)h - c_0 = 0.$$

On peut donc dire que g' et h sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(47) \qquad cpg'^2 + 2ng'h + ph^2 + qg' + rh + s = 0,$$

$$(48) \qquad cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg' + qh + s' = 0;$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (45) et (46) sont des conséquences

de (17) et (18), ce qui donne, en désignant par λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 des constantes :

$$\begin{aligned}
a_3 &= \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 &= \lambda_2 p + \mu_2 n,\\
b_3 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp, & ca_3 &= \lambda_2 n + \mu_2 cp,\\
b_1 - c_2 &= \lambda_1 q + \mu_1 cr, & c(a_1 - c_3) &= \lambda_2 q + \mu_2 cr,\\
a_1 - c_3 &= \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 - c_2 &= \lambda_2 r + \mu_2 q,\\
-c_1 &= \lambda_1 s + \mu_1 s', & -c_0 &= \lambda_2 s + \mu_2 s'.
\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
cp(\lambda_1 - \mu_2) &= n(\lambda_2 - c\mu_1),\\
n(\lambda_1 - \mu_2) &= p(\lambda_2 - c\mu_1).
\end{aligned}$$

D'ailleurs, le déterminant $cp^2 - n^2$ ne peut s'annuler : p et n, en effet, ne sont pas nuls et c n'est pas un carré parfait, car on retomberait (n° **210**) sur le cas elliptique de multiplication elliptique complexe; donc $\lambda_1 = \mu_2$, $\lambda_2 = c\mu_1$, et l'on en conclut, pour les a_i, b_i, c_i, d_i, les valeurs suivantes :

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 &= c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr, & b_0 &= cc_3 + \lambda_1 cr + \mu_1 cq,\\
a_1 &= c_3 + \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 &= c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr,\\
a_2 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp, & b_2 &= \lambda_1 cp + \mu_1 cn,\\
a_3 &= \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp,\\
-c_0 &= \lambda_1 s' + \mu_1 cs, & -d_0 &= \lambda_1 cs + \mu_1 cs',\\
-c_1 &= \lambda_1 s + \mu_1 s', & -d_1 &= \lambda_1 s' + \mu_1 cs,\\
c_2 &= c_2, & d_2 &= cc_3,\\
c_3 &= c_3, & d_3 &= c_2.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, c_2 et c_3 désignent des entiers arbitraires ; λ_1 et μ_1, également arbitraires, sont des nombres entiers ou même fractionnaires, mais tels alors que les a_i, b_i, c_i, d_i soient entiers : on voit immédiatement, dans ce dernier cas, que les facteurs qui *peuvent* figurer au dénominateur de λ_1 et μ_1 sont connus *a priori* et sont en nombre limité.

226. Il faut maintenant rechercher dans quels cas les équations (47) et (48), jointes à $g = cg'$, donnent pour g, h, g' des valeurs telles que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif.

A cet effet, observons que les équations (47) et (48), si l'on y regarde h et g comme des coordonnées courantes, représentent deux coniques *concentriques;* pour simplifier les calculs, transportons l'origine au centre commun dans le plan des hg'; *cela ne changera pas les parties imaginaires de* g, h, g', et les deux équations deviennent

$$(50)\qquad \begin{cases} cpg^2 + 2ng'h + ph^2 + \varpi = 0, \\ cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + \varpi' = 0, \end{cases}$$

ϖ et ϖ' désignant des constantes qu'il est inutile d'expliciter.

On en déduit, en appelant g_1, h_1, g'_1 et g_0, h_0, g'_0 les parties imaginaires et réelles de g, h, g'

$$(51)\qquad g' = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}\,h, \qquad -g'_1 = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}\,\frac{h_1}{h_0^2 + h_1^2}.$$

L'élimination de g' entre les deux équations (50) donne l'équation en h :

$$(52)\qquad h^4 + \mathrm{M}h^2 + c\mathrm{N}^2 = 0;$$

étant posé

$$\mathrm{M} = \frac{\varpi' cp - \varpi n}{cp^2 - n^2},$$

$$\mathrm{N} = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}.$$

En remplaçant h par $h_0 + ih_1$ et séparant le réel de l'imaginaire, on trouve

$$h_0^4 + h_1^4 - 6h_0^2 h_1^2 + \mathrm{M}(h_0^2 - h_1^2) + c\mathrm{N}^2 = 0,$$
$$2h_0 h_1(2h_0^2 - 2h_1^2 + \mathrm{M}) = 0.$$

Si $h_0 h_1$ est $\neq 0$, on aura $-2(h_0^2 - h_1^2) = \mathrm{M}$; substituons à M cette valeur dans la première des deux équations précédentes, nous trouvons

$$(53)\qquad (h_0^2 + h_1^2)^2 - c\mathrm{N}^2 = 0.$$

Or la condition $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$ s'écrit, en y remplaçant g'_1 par sa valeur (51) et g_1 par cg'_1,

$$(54) \qquad (h_0^2 + h_1^2)^2 - cN^2 < 0,$$

ce qui est en contradiction avec (53). Il faut donc que $h_0 h_1 = 0$, et comme h_1 ne peut être nul, puisque g_1 et g'_1 le seraient aussi (51), on a

$$h_0 = 0,$$

et l'équation (52) donne

$$(55) \qquad h_1^4 - M h_1^2 + cN^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir au moins une racine réelle, telle que $h_1^2 - cN^2$ soit négatif (54); il en résulte que l'*équation* (55) *en* h_1^2 doit avoir ses deux racines réelles et positives (car leur produit est positif); cela implique

$$(56) \qquad M > 0, \qquad M^2 - 4cN^2 > 0.$$

S'il en est ainsi, la plus petite racine de l'équation en h_1^2 est positive et inférieure à $\sqrt{cN^2}$, puisque le produit des deux racines est cN^2; donc, si h_1^2 est cette plus petite racine, $h_1^4 - cN^2$ sera < 0.

Inversement, on reconnaît que les conditions (56), qui sont nécessaires, sont suffisantes, et *voici le résultat final, traduit géométriquement :*

227. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant pair, non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$g = cg',$$

$$cpg^2 + 2ng'h + ph^2 + qg' + rh + s = 0,$$

$$cug'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg + qh + s = 0;$$

les n, p, q, r, s, s sont des entiers; c est un entier positif. Les deux

dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite, en valeur absolue, conviennent et conviennent seules au problème; g' et g se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (49).

Deuxième hypothèse. — *Invariant impair.*

228. La relation singulière entre g, h et g' peut être supposée de la forme

$$g = h + cg' \qquad (c > 0),$$

c étant > 0 pour que l'invariant $1 + 4c$ soit supérieur à 1.

Remplaçons g par cette valeur dans les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; celles-ci deviennent

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} & c^2 a_3 g'^2 + [2a_3 c + ca_2 + cb_3] h g' + (a_3 + b_3 + a_2 + b_2) h^2 \\ & \qquad + c(a_0 - d_3) g' + (b_0 - d_2 + a_0 - d_3) h - d_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} & c\, a_2 g'^2 + [ca_3 + a_2 + b_2] h g' + (a_3 + b_3) h^2 \\ & \qquad + (ca_1 - d_2) g' + (b_1 - d_3 + a_1) h - d_1 = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} & c\, b_3 g'^2 + [ca_3 + b_3 + b_2] h g' + (a_3 + a_2) h^2 \\ & \qquad + (b_0 - cc_3) g' + (a_0 - c_2 - c_3) h - c_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} & b_2 g'^2 + [b_3 + a_2] h g' + a_3 h^2 \\ & \qquad + (b_1 - c_2) g' + (a_1 - c_3) h - c_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme dans le cas précédent, les premiers membres de (B) et

de (C) doivent être identiques, ce qui donne

$$(57)\quad \begin{cases} a_2 = b_3, & b_0 + d_2 = c(a_1 + c_3), \\ b_1 + c_2 + c_3 = a_0 - a_1 + d_3, & c_0 = d_1. \end{cases}$$

Maintenant, en multipliant les premiers membres de (A), (C), (D) par des constantes indéterminées et ajoutant à (A), on peut *toujours* faire en sorte que les termes du second ordre dans le résultat soient de la forme $h^2 - hg' - cg'^2$, à un facteur près; comme

$$h^2 - hg' - cg'^2 = h^2 - gg';$$

la relation qu'on obtient ainsi entre h et g' est singulière, et elle doit être, dès lors, une identité; cela revient à dire que les premiers membres de (A), (C), (D) ne sont pas linéairement distincts, ce qui exige l'évanouissement des déterminants du troisième ordre compris dans la matrice

$$\begin{matrix} b_2 & 2b_3 & a_3 & b_1 - c_2 & a_1 - c_3 & c_1, \\ c^2 a_3 & 2c(a_3 + b_3) & a_3 + 2b_3 + b_2 & c(a_0 - d_3) & b_0 - d_2 + a_0 - d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3 + b_2 + b_3 & a_3 + b_3 & ca_1 - d_2 & b_1 - d_3 + a_1 & d_1. \end{matrix}$$

Or, le premier de ces déterminants développé donne

$$(ca_3 - b_2 - b_3)[(b_2 + ca_3)^2 + (b_2 + ca_3)(a_3 + 2b_3) - c(a_3 + 2b_3)^2] = 0.$$

La quantité entre crochets ne peut être nulle, à moins que $b_2 + ca_3$ et $a_3 + 2b_3$ ne soient nuls à la fois : le discriminant $1 + 4c$ n'est pas en effet un carré parfait, puisqu'on a exclu le cas elliptique.

Mais si $b_2 + ca_3 = a_3 + 2b_3 = 0$, on reconnaît de suite que dans les relations (A), (B) et (D) les termes du plus haut degré sont $2cb_1(h^2 - hg' - cg'^2)$, $-b_3(h^2 - hg' - cg'^2)$ et $-2b_3(h^2 - hg' - cg'^2)$, c'est-à-dire que ces relations seraient singulières, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que

$$(58)\qquad ca_3 = b_2 + b_3.$$

En tenant compte de cette relation, la matrice devient

$$\begin{matrix} ca_3 - b_3 & b_3 & b_1 - c_2 & a_1 - c_3 & c_1, \\ c^2 a_3 & c(a_3 + b_3) & c(a_0 - d_3) & b_0 - d_2 + a_0 - d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3 & ca_1 - d_2 & b_1 - d_3 + a_1 & d_1, \end{matrix}$$

ce qui donne d'abord

$$(b_1 - c_2)c^2[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] + c^2(a_0 - d_3)[-ca_3^2 + a_3 b_3 + b_3^2] \\ + (ca_1 - d_2)c[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] = 0.$$

Le facteur $ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2$ ne peut s'annuler, puisque $1 + 4c$ n'est pas carré parfait et que d'ailleurs si a_2, a_3, b_2, b_3 étaient nuls à la fois, les équations (A), (B), (C), (D) seraient singulières; il reste donc

$$c(b_1 - c_3 - a_0 + d_3) + ca_1 - d_2 = 0.$$

On trouve de même

$$c(a_1 - c_3) - b_0 + d_2 - a_0 + b_1 + a_1 = 0,$$
$$cc_1 - d_0 + d_1 = 0.$$

En utilisant (57) et (58), on obtient toutes les relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{lll} b_2 + b_3 = ca_3, & b_0 = ca_1, & d_2 = cc_3, \\ a_2 = b_3, & b_1 = a_0 - a_1, & d_3 = c_2 + c_3, \\ & & d_1 = c_0, \\ & & d_0 = c_0 + cc_1. \end{array} \right.$$

229. Il ne subsiste maintenant, entre h et g', que les équations (C) et (D), qui s'écrivent en tenant compte de (59),

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} cb_3 g'^2 + 2ca_3 hg' + (a_3 + b_3)h^2 \\ \quad + c(a_1 - c_3)g' + (a_0 - c_2 - c_3)h - c_0 = 0, \end{array} \right.$$

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ca_3 - b_3)g'^2 + 2b_3 hg' + a_3 h^2 \\ \quad + (a_0 - a_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0. \end{array} \right.$$

On peut donc dire que h et g' sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(62)\qquad cng'^2 + 2cphg' + (n+p)h^2 + crg' + (q+r)h + s = 0,$$

$$(63)\qquad (cp-n)g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0;$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (60) et (61) sont des conséquences de (62) et (63); on obtient ainsi les valeurs des a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned}
a_0 &= c_2 + c_3 + \lambda_2(q+r+cr) + \mu_2(q+r),\\
a_1 &= c_3 + \lambda_2(q+r) + \mu_2 r,\\
a_2 &= \lambda_2 cp + \mu_2 n,\\
a_3 &= \lambda_2(n+p) + \mu_2 p,\\
b_0 &= cc_3 + \lambda_2 c(q+r) + \mu_2 cr,\\
b_1 &= c_2 + \lambda_2 cr + \mu_2 q,\\
b_2 &= \lambda_2 cn + \mu_2(cp-n),\\
b_3 &= \lambda_2 cp + \mu_2 n,\\
-c_0 &= \lambda_2(s+cs') + \mu_2 s,\\
-c_1 &= \lambda_2 s + \mu_2 s',\\
c_2 &= c_2,\\
c_3 &= c_3,\\
-d_0 &= \lambda_2(s+cs+cs') + \mu_2(s+cs),\\
-d_1 &= \lambda_2(s+cs) + \mu_2 s,\\
d_2 &= cc_3,\\
d_3 &= c_2 + c_3.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules c_2 et c_3 sont deux entiers arbitraires; λ_2 et μ_2, également arbitraires, sont des entiers, ou des fractions choisies de telle sorte que les a_i, b_i, c_i, d_i soient entiers.

Enfin, on établit, comme dans le cas précédent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif, et *le résultat est celui-ci :*

250. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant impair non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$g = h + cg',$$
$$cng'^2 + 2cphg' + (n+p)h^2 + crg' + (q+r)h + s = 0,$$
$$(cp - n)g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0;$$

les $n, p, q, \ldots, s'$ sont des entiers ; c est un entier positif. Les deux dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques ; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre ; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue conviennent et conviennent seules au problème : g et g' se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (64).

QUATRIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES EN ELLES-MÊMES.

251. Le problème de déterminer, parmi toutes les surfaces hyperelliptiques dont chaque point répond à un seul couple d'arguments aux périodes près, celles qui possèdent des transformations birationnelles en elles-mêmes, et de former toutes ces transformations, revient à chercher les multiplications complexes de degré *un*.

Désignons, en effet, par U, V le point qui répond, dans une telle transformation au point u, v; comme du, dv, dU, dV sont des différentielles de première espèce et qu'il n'existe que deux différentielles de cette nature, dU et dV sont linéaires en du, dv, c'est-à-dire que

$$U = \lambda u + \mu v + \text{const.},$$
$$V = \lambda' u + \mu' v + \text{const.}$$

Négligeons les constantes, que nous réintroduirons ensuite; on voit bien que l'on est ramené à chercher toutes les multiplications complexes qui font correspondre à un point U, V *un seul point* u, v.

Distinguons maintenant deux cas, selon que la transformation en question est ordinaire ou non.

232. *Transformations ordinaires.* — Si (u, v) et (U, V) désignent les deux points de la surface transformés l'un de l'autre et si $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta paire du premier ordre, lorsque le point u, v décrira une courbe $\Theta(u+\alpha, v+\beta) = 0$, le point U, V décrira une courbe analogue $\Theta(U+\alpha', V+\beta') = 0$; une transformation ordinaire du premier ordre change, en effet, une fonction thêta d'ordre *un* en une fonction semblable. En augmentant U et V de constantes convenables on peut faire en sorte que les deux courbes coïncident, et par suite la courbe $\Theta(u+\alpha, v+\beta) = 0$ admettra une transformation birationnelle en elle-même.

Or, cette courbe est une courbe de genre *deux*, donc hyperelliptique; elle a les modules de la surface et n'admet, *en général*, que deux transformations birationnelles, à savoir la transformation unité et celle qui fait correspondre à un point son conjugué hyperelliptique; sur la surface ces transformations sont [1] :

$$U = u, \qquad V = v$$

et

$$U = -2\alpha - u, \qquad V = -2\beta - v.$$

---

[1] *Voir* par exemple à ce sujet notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce Journal, 4e série, p. 422.

Elles sont comprises dans les formules

$$(1) \qquad U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

qui donnent les transformations birationnelles évidentes de la surface en elle-même.

Mais il peut se faire que la courbe de genre *deux* possède *d'autres transformations univoques* que les précédentes; pour les trouver, prenons cette courbe sous la forme

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_6).$$

Soit X, Y le point transformé de x, y : les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe se transformeront évidemment les unes dans les autres, de sorte que l'on aura

$$(2) \qquad \frac{dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx,$$
$$\frac{X\,dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} = \frac{\alpha' x + \beta'}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx,$$

α, β, α', β' étant des constantes. On en tire

$$X = \frac{\alpha' x + \beta'}{\alpha x + \beta}, \qquad dX = k\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2},$$

et en portant ces valeurs de X et dX dans (2), il vient

$$\frac{k}{\sqrt{[\alpha' x + \beta' - a_1(\alpha x + \beta)]\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}.$$

En d'autres termes, la forme sextique $(X - a_1 Z)\ldots(X - a_6 Z)$ se réduit, à un facteur constant près, à la forme $(x - a_1 z)\ldots(x - a_6 z)$ par la substitution

$$X = \alpha' x + \beta' z, \qquad Z = \alpha x + \beta z.$$

Le problème revient donc à chercher toutes les formes binaires

sextiques admettant une transformation linéaire en elles-mêmes autre que $X = \pm x$, $Z = \pm z$: la solution en est connue [1], les formes correspondantes sont au nombre de six :

1° $$Ax^6 + Bx^4z^2 + Cx^2z^4 + Dz^6.$$

La surface de Kummer correspondant à cette forme est le *tétraèdroïde de Cayley*.

2° $$xz(Ax^4 + Bx^2z^2 + Cz^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *deux fois tétraèdroïde*.

3° $$Ax^6 + Bx^3z^3 + Cz^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *trois fois tétraèdroïde*.

4° $$x^6 + z^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *quatre fois tétraèdroïde*.

5° $$xz(x^4 + z^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *six fois tétraèdroïde* [2].

6° $$z(x^5 + z^5).$$

L'expression des périodes correspondant aux cinq premiers cas est bien connue; on a : dans le premier cas,

$$g = g';$$

dans le deuxième cas,

$$h = \tfrac{1}{2}, \qquad g = g';$$

---

[1] *Voir*, par exemple, un Mémoire de M. O. Bolza dans l'*American Journal of Mathematics*, t. X, p. 50.

[2] *Voir*, à ce sujet, un travail de M. Hutchinson.

dans le troisième cas,

$$g = g' = 2h;$$

dans le quatrième cas,

$$g = g' = 2h = \frac{2i}{\sqrt{3}};$$

dans le cinquième cas,

$$g = g' = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{2}), \qquad h = \tfrac{1}{2}.$$

Dans les trois premiers cas, il n'y a entre les périodes que des relations singulières; dans les deux autres, on peut définir les périodes respectivement par les équations

$$g = g' = 2h, \qquad h^2 - gg' = 1,$$

$$g = g', \qquad 2h = 1, \qquad h^2 - gg + g - 1 = 0,$$

qui sont encore des relations singulières.

On en déduira toutes les transformations univoques cherchées par les formules qui vont être données (n^{os} **233**, **237**, **240**).

Le sixième cas est plus intéressant et compliqué; nous le traiterons complètement à la fin de ce travail.

233. Ainsi, *les surfaces hyperelliptiques possédant des transformations birationnelles ordinaires en elles-mêmes (autres que les transformations évidentes) sont celles qui dérivent des radicaux portant sur les polynomes*

$$Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D, \qquad x(Ax^4 + Bx^2 + C),$$

$$Ax^6 + Bx^3 + C, \qquad x^6 + 1, \qquad x(x^4 + 1), \qquad x^5 + 1.$$

234. *Transformations singulières.* — Il reste à faire la même étude pour les transformations *singulières*, ce qui revient à la recherche des multiplications complexes singulières de degré *un;* nous examinerons successivement les cinq cas de multiplication.

235. *Surfaces simplement singulières.* — Les périodes étant liées *uniquement* par une relation singulière,

$$g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

les multiplications complexes, *singulières ou non*, sont, à une constante additive près, données par les formules (n° **195**)

$$(3)\qquad U = \rho u - \gamma\sigma v, \qquad V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v.$$

Le degré δ étant

$$\delta = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2,$$

la transformation (3) sera birationnelle si les entiers ρ et σ sont tels que

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Dans le cas non elliptique, c'est-à-dire si $\beta^2 - 4\gamma$ n'est pas carré, cette équation, avec le second membre $+1$, a toujours des solutions autres que $\rho = \pm 1$, $\sigma = 0$; pour qu'elle en ait si l'on prend -1, il faut et il suffit que la forme $X^2 - (\beta^2 - 4\gamma) Y^2$ puisse représenter -4 (n° **179**). Dans les deux cas, il résulte des n^os^ **169** et **180** que toutes les transformations (3) sont des puissances d'une seule d'entre elles, combinées avec la transformation $U = -u$, $V = -v$.

Donc, *toutes les transformations birationnelles, ordinaires ou singulières, d'une surface hyperelliptique simplement singulière, en elle-même, s'obtiennent en combinant une même transformation du type* (3), *et ses puissances, avec les transformations*

$$U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si la surface est une surface de Kummer à un point de laquelle correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$, les transformations birationnelles précédentes se réduisent aux puissances d'une seule d'entre elles et forment un groupe *évidemment infini*. C'est là le premier exemple qui ait été donné de surface admettant un groupe infini et discontinu de transformations birationnelles sans admettre de transformations continues; je l'ai indiqué incidemment dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du premier semestre de 1898; M. Painlevé a fait connaître ensuite, dans le même Recueil, un exemple encore plus simple, qui correspond à un cas de dégénérescence des fonctions abéliennes en fonctions elliptiques.

256. *Remarque.* — Les transformations (3) sont, en général, singulières, car l'indice correspondant, K, est (n° **195**) $\sigma(2\rho+\beta\sigma)$ et ne peut être nul que pour $\sigma=0$ et $2\rho+\beta\sigma=0$.

Si $\sigma=0$, la relation $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2=\pm 1$ donne $\rho=\pm 1$, et l'on retombe sur la transformation $U=\pm u$, $V=\pm v$; si $2\rho+\beta\sigma=0$, la même relation, écrite $(2\rho+\beta\sigma)^2-(\beta^2-4\gamma)\sigma^2=\pm 4$, montre que l'invariant, $\beta^2-4\gamma$, qui est essentiellement positif et supérieur à 1, doit être égal à 4, ce qui répond au cas elliptique du tétraédroïde.

En supposant, par exemple, comme on en a le droit, que la relation singulière correspondante soit $g-g'=0$, on trouve la transformation *ordinaire*

$$U=v, \qquad V=u.$$

On devait effectivement rencontrer une telle transformation (n° **232**). En dehors de l'invariant 4, les surfaces simplement elliptiques n'ont pas de transformations birationnelles en elles-mêmes autres que les transformations évidentes : car, si $\beta^2-4\gamma$ est carré parfait, la forme $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2$ ne peut représenter $+1$ que pour $\sigma=0$, $\rho=\pm 1$, et elle ne peut représenter -1 que si $\beta^2-4\gamma=4$, avec $2\rho+\beta\sigma=0$: $\sigma=\pm 1$.

257. *Surfaces doublement singulières.* — Les périodes étant liées uniquement par deux relations singulières réductibles (n° **195**) aux formes

$$h^2-gg'=d, \qquad \alpha g+\beta h+\gamma g'=\omega,$$

les transformations birationnelles en elles-mêmes, *ordinaires ou singulières*, de la surface correspondante sont données par les formules du n° **200**

$$(4)\quad \begin{cases} U=u[\theta+\alpha\sigma g+(\beta\sigma-\tau)h]+v[-\gamma\rho+\tau g+\gamma\sigma h], \\ V=u[\alpha\rho+\alpha\sigma h+(\beta\sigma-\tau)g']+v[\theta+\beta\rho+\tau h+\gamma\sigma g'], \end{cases}$$

où θ, σ, ρ, τ sont des entiers arbitraires, tels seulement que le degré de la multiplication soit l'unité, c'est-à-dire (n° **202**) que

$$\theta^2+\theta(\beta\rho+\omega\sigma)+\alpha\gamma\rho^2-\alpha\gamma d\sigma^2+(\beta\sigma-\tau)(\omega\rho+d\tau)=\pm 1.$$

Cette équation, si l'on pose, comme au n° **208** :

$$(5)\qquad \xi = 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma, \qquad \eta = 2\tau - \beta\sigma, \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

s'écrit

$$(6)\qquad \xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4.$$

On est ainsi ramené à la résolution en nombres entiers d'une équation évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de ξ, η, ρ, σ; car, par exemple, elle se réduit à une équation de Pell pour $\eta = \sigma = 0$, si l'on prend $+4$ au second membre.

Nous n'en connaissons pas la solution générale; les résultats du n° **208** montrent que, si l'on en a deux solutions, ξ, η, ρ, σ et ξ', η', ρ', σ', on en obtiendra une troisième, ξ'', η'', ρ'', σ'', par les formules (31) de ce numéro.

238. *Remarque I.* — Parmi les transformations précédentes, celles qui sont ordinaires rentrent dans l'un des deux cas (n° **205**),

$$\rho = \eta = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi = \sigma = 0;$$

on reconnaît aisément qu'elles correspondent à des cas elliptiques de tétraédroïde, comme cela doit être (n° **232**).

239. *Remarque II.* — Les multiplications qui répondent à

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

c'est-à-dire à $\xi = 0$, ont été rencontrées au n° **205**. Pour qu'il en existe de degré un, il faut que l'équation

$$(7)\qquad -d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4$$

ait des solutions entières en η, ρ, σ, telles que $\eta + \beta\sigma$ soit pair; alors on voit de suite que $\beta\rho + \omega\sigma$ est également pair, et les équations (5), où $\xi = 0$, donnent des valeurs entières pour θ et τ.

Le carré d'une de ces multiplications (n° **209**) est la multiplication

ordinaire

$$U = \varepsilon u, \qquad V = \varepsilon v,$$

ε étant ± 1 selon que le second membre de (7) a été ∓ 4.

Il en résulte que si l'équation (7) a des solutions entières de la nature indiquée, le second membre étant égal à -4, le carré de la transformation birationnelle correspondante (4) sera la transformation unité, c'est-à-dire que la transformation birationnelle est *involutive*.

Sur la surface de Kummer, où un même point répond aux arguments u, v et $-u$, $-v$, on a aussi des transformations involutives en prenant le second membre de (7) égal à $+4$.

240. *Surfaces triplement singulières.* — Elles possèdent également des transformations birationnelles qu'il serait aisé de trouver *toutes*, en suivant la même marche que dans le cas précédent.

241. *Autres surfaces possédant des multiplications complexes.* — Ce sont celles qui correspondent au quatrième et au cinquième cas de multiplication complexe; *il n'y a entre les périodes qu'une seule relation singulière*, et une ou deux autres non singulières; nous traiterons simultanément tous ces cas par une méthode différente de celle qui précède.

Soit $g + \beta h + \gamma g' = 0$ la relation singulière unique qui lie les périodes; considérons une transformation birationnelle de la surface en elle-même

$$(\mathrm{T}) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

c'est-à-dire une transformation de *degré* un, conduisant des périodes g, h, g' aux mêmes périodes. Si l et k sont ses deux indices, on aura

$$(8) \qquad l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = +1.$$

Effectuons maintenant deux fois de suite la transformation T; nous obtenons une transformation T^2, et pour ses indices L et K, les formules (29) et (30) du n° **148**, où l'on fait

$$l_1 = l, \qquad k_1 = k, \qquad \mathrm{B}_1 = \mathrm{B} = \beta, \qquad \Delta = \Delta_1 = \beta^2 - 4\gamma,$$

donnent

$$2K = k(2l + \beta k) + \varepsilon_1 k(2l + \beta k),$$
$$2(2L + \beta K) = (2l + \beta k)^2 + \varepsilon_1 k^2(\beta^2 - 4\gamma),$$

ε_1 étant ± 1, selon que T est droite ou gauche.

On trouve ainsi, pour $\varepsilon = +1$:

$$K = k(2l + \beta k),$$
$$L = l^2 - \gamma k^2;$$

pour $\varepsilon = -1$:

$$K_1 = 0,$$
$$L_1 = 1,$$

en tenant compte de (8). On vérifie également que

$$L^2 + \beta KL + \gamma K^2 = +1. \tag{9}$$

242. Plaçons-nous d'abord dans le cas de $\varepsilon = +1$, et supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire, g_1, de g soit positive : les fonctions intermédiaires singulières d'indices L et K sont celles qui vérifient :

$$\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-Lu+\gamma Kv]+\nu},$$
$$\varphi(u+h, v+g) = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-Ku+(L+\beta K)v]+\nu'}.$$

En vertu de (9), pour ν et ν' donnés, elles se réduisent (I, n° **28**) à une seule d'entre elles, $\varphi(u, v)$, à un facteur constant près. Pour d'autres valeurs de ν et ν', les fonctions intermédiaires d'indices L et K se réduisent évidemment (à un facteur près) à $\varphi(u+c, v+c')$, les constantes c et c' étant convenablement choisies.

Cela posé, soit $\Xi(u, v)$ une fonction thêta, d'ordre un, paire; lorsque U, V décrit, sur la surface considérée, la courbe $\Xi(U+c, V+c') = 0$, le point u, v, *qui lui correspond univoquement par* T^2, décrit (n° **167**) la courbe $\varphi(u+c_1, v+c_1) = 0$; et réciproquement, si u, v décrit $\varphi(u+c_1, v+c_1) = 0$, c_1 et c'_1 étant des constantes quelconques, U, V décrit $\Xi(U+c, V+c') = 0$.

Considérons maintenant la transformation de la surface en elle-même

$$(8)\qquad \begin{cases} U' = lu - \gamma kv, \\ V' = ku + (l + \beta k)v. \end{cases}$$

Elle est birationnelle (n° **235**) en vertu de (8), et ses indices, calculés au n° **195**, sont précisément L et K ; d'après ce qui précède, si u, v décrit $\varphi(u + c_1, v + c'_1) = 0$, le point U', V', qui lui correspond par S, décrira $\Xi(U' + c_2, V' + c'_2) = 0$.

Par suite la transformation T^2S^{-1} fait correspondre point par point les deux courbes

$$(10)\qquad \Xi(U + c, V + c') = 0, \qquad \Xi(U' + c_2, V' + c'_2) = 0;$$

elle est donc ordinaire et d'ordre 1, puisqu'elle fait correspondre, à une fonction thêta une fonction thêta de même ordre (n° **164**).

En d'autres termes, *en dehors des six cas spéciaux signalés au n°* **232**, la transformation T^2S^{-1} doit se réduire soit à la substitution unité, soit à la substitution qui ne fait que changer les signes des variables (¹).

Sous une autre forme, la substitution T^2 doit être identique à la substitution

$$(11)\qquad \begin{cases} U = lu - \gamma kv, \\ V = ku + (l + \beta k)v, \end{cases}$$

ou à cette même substitution dans laquelle les signes de l et k seraient simultanément changés.

243. Supposons maintenant $\varepsilon = -1$; la transformation T^2, qui a pour indices $L_1 = 1$ et $K_1 = 0$, est *ordinaire;* si donc l'on exclut encore les six cas du n° **232**, T^2 devra se réduire à la substitution unité ou à la substitution $U = -u$, $V = -v$ (²).

(¹) Si l'on est dans un des six cas spéciaux, T^2S^{-1} devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

(²) Dans les six cas spéciaux, T^2 devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

244. Exprimons d'abord que T^2 est identique à (11): on a, en partant de (T):

$$(12)\quad \begin{cases} l = \lambda^2 + \mu\lambda', & k = \lambda'(\lambda + \mu'), \\ -\gamma k = \mu(\lambda + \mu'), & l + \beta k = \mu^2 + \mu\lambda'. \end{cases}$$

La quantité k est $\gtrless 0$, sinon la transformation (T) serait ordinaire, et l'on retomberait dans un des six cas exclus; alors λ' est aussi $\gtrless 0$, et les équations (12) donnent

$$\lambda = \frac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'},$$

$$\mu = -\gamma\lambda',$$

$$\mu' = \frac{k + \beta\lambda'^2}{2\lambda'}.$$

Quant à λ', il satisfait à l'équation bicarrée

$$(13)\qquad \lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) - 2\lambda'^2(2l + \beta k) + k^2 = 0,$$

qui donne, à cause de (8),

$$(14)\qquad \lambda'^2 = \frac{2l + \beta k \pm 2}{\beta^2 - 4\gamma}.$$

La transformation (T) est ainsi

$$(T)\quad \begin{cases} U = \dfrac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'}u - \gamma\lambda' v, \\ V = \lambda' u + \dfrac{k + \beta\lambda'^2}{2\lambda} v, \end{cases}$$

λ' étant défini par (14).

Écrivons que c'est une transformation faisant correspondre à u, v un seul point U, V; nous avons en particulier (n° **137**), les a_i étant des entiers,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'} = a_0 + a_3 g + a_2 h, \\ \lambda = a_1 + a_3 h + a_2 g, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'^2} = \frac{a_0 + a_3 g + a_2 h}{a_1 + a_3 h + a_2 g}.$$

Comme λ'^2 est une fraction (14), c'est là une relation singulière entre g, h, g', qui doit être une conséquence de $g + \beta h + \gamma g' = 0$, ce qui donne en particulier

$$a_2(\beta\lambda'^2 - h) = a_3 2\gamma\lambda'^2,$$
$$a_2 2\lambda'^2 \qquad = a_3(\beta\lambda'^2 + h).$$

On en conclut que $a_2 = a_3 = 0$, car le déterminant $\lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) - h^2$ ne peut être nul.

S'il était nul en effet, on aurait par (13)

$$\lambda'^2(2l + \beta k) = k^2,$$

et en écrivant que

$$\lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) = k^2,$$

on trouverait

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 0,$$

résultat contradictoire avec l'hypothèse (8).

Alors, a_2 et a_3 étant nuls, les équations (15) montrent que λ' et $\frac{1}{2\lambda'}(k - \beta\lambda'^2)$ sont entiers; en appelant ρ cette dernière quantité, la transformation (T) s'écrit

$$U = \rho u - \gamma\lambda' v,$$
$$V = \lambda' u + (\rho + \beta\lambda')v,$$

λ' et ρ étant entiers. On vérifie de plus, en tenant compte de (8) et (14), que

$$\rho^2 + \beta\lambda'\rho + \gamma\lambda'^2 = \pm 1.$$

Dans ces conditions, (T) est une des transformations connues qui dérivent de l'existence de la relation singulière $g + \beta h + \gamma g' = 0$ (n° **235**), et la surface considérée n'admet pas d'autres transformations univoques.

245. Il reste maintenant à reconnaître si T^2 peut être identique à la substitution $U = \varepsilon u$, $V = \varepsilon v$, $(\varepsilon = \pm 1)$; il faut pour cela que

$$\varepsilon = \lambda^2 + \mu\lambda', \qquad 0 = \lambda'(\lambda + \mu'),$$
$$0 = \mu(\lambda + \mu'), \qquad \varepsilon = \mu'^2 + \mu\lambda'.$$

De là deux hypothèses :

1° $$\mu = \lambda' = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \lambda^2 = \mu'^2 = \varepsilon;$$

la transformation (T) serait alors

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v,$$

ou

$$U = \pm iu, \qquad V = \pm iv.$$

Dans ce dernier cas, il faut, pour qu'à un point u, v corresponde un seul point U, V, que

$$i = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad 0 = a_1 + a_3 h + a_2 g',$$

les a étant entiers; comme il n'y a pas de relation singulière entre h et g' seuls, $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ et a_0, égal à i, ne peut être entier. On ne trouve donc, dans cette hypothèse, que les transformations évidentes $U = \pm u$, $V = \pm v$.

2° $$\lambda + \mu = 0, \qquad \lambda^2 + \mu\lambda' = \varepsilon.$$

Alors les relations

$$\lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h,$$
$$\lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', \qquad -\lambda = b_1 + b_3 h + b_2 g',$$

donnent

$$a_0 + b_1 + a_3 g + h(a_2 + b_3) + b_2 g' = 0.$$

Il suffit maintenant de se reporter aux équations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe et aux formes (7) du n° **189**, pour reconnaître que, grâce à cette relation, (A), (B), (C), (D) deviennent singulières; en d'autres termes, la transformation considérée n'implique entre les périodes que des relations singulières, et comme g, h, g' ne sont supposées liées que par une relation de cette nature, la transformation (T) en dérive.

246. La conclusion de toute cette analyse est la suivante :

Dans le cas de multiplication complexe où les périodes sont liées par une relation singulière et une ou deux autres non singulières, les surfaces hyperelliptiques correspondantes ne possèdent pas d'autres transformations univoques en elles-mêmes que celles dérivant de la relation singulière et étudiées au n° 235.

Il faut y joindre naturellement les transformations habituelles

$$U = \pm u + c, \qquad V = \pm v + c'.$$

Les seuls cas d'exception possibles sont les six cas du n° **232**, qui ont été explicitement réservés aux n^os^ **242**, **243** et **244**; les cinq premiers n'impliquent entre les périodes que des relations singulières et sont compris dans les formules générales des n^os^ **235**, **237** et **240**; il reste seulement à examiner le sixième, et tout d'abord à reconnaître quelles relations il suppose entre les périodes.

Étude du cas hyperelliptique dérivé du radical $\sqrt{x^5+1}$.

247. On trouve aisément pour les périodes, en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

les valeurs

$$g = \omega^2 - \omega^3, \qquad h = -(1+\omega^2), \qquad g' = -\omega^4, \qquad h^2 - gg' = -\omega^3;$$

d'où la relation singulière d'invariant *cinq*

$$h^2 - gg' - g - h - 1 = 0.$$

Faisons sur les périodes la transformation ordinaire du premier ordre définie par

$$a_3 = b_1 = c_2 = -d_0 = 1,$$

tous les autres a_i, b_i, c_i, d_i étant nuls; on trouve, en appelant G, H, G

les périodes nouvelles

$$G = -\frac{1}{g}, \qquad H = -\frac{h}{g}, \qquad G' = -\frac{h^2 - gg}{g},$$

liées par la relation

$$G + H - G' - 1 = 0.$$

Prenons pour périodes les quantités G, H, $G' + 1$ que nous désignerons par g, h, g', — ces lettres n'ayant pas la même signification que plus haut, — il vient

$$g = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad h = \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad g' = \frac{-1}{\omega^2 - \omega^3},$$

avec

$$g = h + g'.$$

On vérifie ensuite que h et g' sont liés par les deux équations à coefficients entiers

$$(16) \qquad \begin{cases} 2g'h + h^2 - g' - h = 0, \\ g'^2 + h^2 - h + 1 = 0; \end{cases}$$

elles sont du type du n° **250**, où l'on aurait posé (puisque $c = 1$)

$$n = 0, \qquad p = 1, \qquad r = -1, \qquad q = 0, \qquad s = 0, \qquad s' = 1.$$

Nous sommes donc placés dans le dernier cas de multiplication complexe, l'invariant de la relation singulière (ici 5) étant impair (et non carré).

248. Pour rechercher toutes les transformations univoques de la surface correspondante, on peut raisonner comme il suit :

Soit T l'une quelconque d'entre elles, d'indices l et k. Je dis que l'on peut trouver deux entiers ρ et σ, tels que

$$(17) \qquad l = \rho^2 - \gamma\sigma^2, \qquad k = \sigma(2\rho + \beta\sigma), \quad \ldots, \quad (\beta - \gamma = -1).$$

Cela revient, en effet, à dire que la substitution

$$\left\{\begin{aligned} U &= lu - \gamma kv, \\ V &= ku + (l + \beta k)v, \end{aligned}\right.$$

où

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = +1,$$

est le carré d'une substitution de même forme

$$(S) \qquad \left\{\begin{aligned} U &= \rho u - \gamma\sigma v, \\ V &= \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v, \end{aligned}\right.$$

où

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Comme la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, ici $x^2 - xy - y^2$, peut représenter -1, la proposition a été établie au n° **180**.

La transformation T change une fonction thêta d'ordre un,

$$\Theta(U + c, V + c'),$$

en une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u + c_1, v + c'_1)$, d'indices l et k; la transformation (S) produit, en raison de (17), un changement analogue (n° **242**). On en conclut, comme au n° **242**, que TS^{-1} est une des transformations *ordinaires* de la surface en elle-même (en comprenant dans celles-ci $U = \pm u$, $V = \pm v$). En d'autres termes T est le produit d'une transformation univoque ordinaire par S; d'ailleurs S, qui est, d'après sa forme même, une des transformations univoques dérivant de l'existence de la relation singulière $g - h - g = 0$, est une puissance d'une certaine transformation Σ_1 (n° **235**), de sorte que l'on obtient toutes les transformations birationnelles de la surface en elle-même en faisant suivre une transformation univoque ordinaire d'une puissance de Σ_1.

Cette transformation Σ_1 se trouve aisément, c'est

$$(\Sigma_1) \qquad \left\{\begin{aligned} U &= v, \\ V &= u - v. \end{aligned}\right.$$

249. Cherchons maintenant les transformations *ordinaires* de degré un. A cet effet, reportons-nous au n° **229** qui donne les entiers caractéristiques des multiplications complexes dans le cas qui nous occupe; nous devons faire dans ces formules

$$n=0,\quad p=1,\quad r=-1,\quad q=0,\quad s=0,\quad s'=1,\quad e=1;$$

d'où

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_2+c_3-2\lambda_2-\mu_2, & b_0 &= c_3-\lambda_2-\mu_2,\\
a_1 &= c_3-\lambda_2-\mu_2, & b_1 &= c_2-\lambda_2,\\
a_2 &= \lambda_2, & b_2 &= \mu_2,\\
a_3 &= \lambda_2+\mu_2, & b_3 &= \lambda_2.\\
-c_0 &= \lambda_2, & -d_0 &= \lambda_2+\mu_2,\\
-c_1 &= \mu_2, & -d_1 &= \lambda_2,\\
c_2 &= c_2, & d_2 &= c_3,\\
c_3 &= c_3, & d_3 &= c_2+c_3.
\end{aligned}$$

Les c_2, c_3, λ_2, μ_2 sont des *entiers* arbitraires; il faut exprimer maintenant que la multiplication est ordinaire et de degré un; c'est-à-dire que ses indices l et k sont respectivement ± 1 et 0. Or, d'après la théorie générale de la transformation,

$$l=(ad)_{03}+(ad)_{12},\qquad k=(ac)_{01}+(ac)_{12}.$$

On a ainsi

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\pm 1 &= 2c_3^2+2c_2c_3+c_2^2-c_3(3\lambda_2+2\mu_2)-c_2(2\lambda_2+\mu_2)+2\lambda_2^2+2\lambda_2\mu_2+\mu_2^2,\\
0 &= c_3^2+2c_2c_3\qquad -c_3(2\lambda_2+2\mu_2)-c_2(\lambda_2+\mu_2)+\lambda_2^2+2\lambda_2\mu_2.
\end{aligned}\right.$$

Posons $2c_3-\lambda_2-\mu_2=x$, $2c_2-\lambda_2=y$, retranchons les deux équations (18) membre à membre et conservons la seconde, il vient, ε désignant ± 1 :

$$\begin{aligned}
4\varepsilon &= x^2+y^2+2\lambda_2^2-2\lambda_2\mu_2+3\mu_2^2,\\
0 &= x^2+2xy+\lambda_2^2+4\lambda_2\mu_2-\mu_2^2.
\end{aligned}$$

L'élimination de y donne, en x, l'équation bicarrée

$$5x^4 + 2x^2[5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon] + (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 - \mu_2^2)^2 = 0.$$

L'équation en x^2 doit avoir ses racines réelles; leur produit étant > 0, la somme doit être > 0 pour qu'il y en ait au moins une positive; donc

$$5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon < 0,$$

ce qui exige $\varepsilon = +1$, de plus λ_2 et μ_2 ne pourront prendre que les valeurs 0 et ± 1, et de telle sorte que $5(\lambda_2^2 + \mu_2^2)$ soit < 0. On a donc à envisager les hypothèses suivantes :

1° $\lambda_2 = \mu_2 = 0$; ce qui donne $x = 0$, $y = \pm 2$, $c_3 = 0$, $c_2 = \pm 1$ et la transformation correspondante est

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v;$$

2° $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = \varepsilon$, d'où $x = \eta$, $y = 0$, en posant $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, et par suite $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $c_2 = 0$. La transformation correspondante est

$$U = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] u + \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] u + \varepsilon g' v;$$

3° $\lambda_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = 0$, d'où $x = \eta$, $y = -\eta$, $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $2c_2 = \varepsilon - \eta$, et la transformation correspondante est

$$U = [-\varepsilon + \varepsilon g + \varepsilon h]\, u + \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h + \varepsilon g'\right] u + \left[-\frac{\eta + \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v.$$

250. On vérifie sans difficulté que toutes ces équations donnent des transformations univoques, qui sont des puissances de la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} -U = gu + hv, \\ -V = hu + g'v, \end{cases}$$

combinées avec $U = -u$, $V = -v$. D'ailleurs la cinquième puissance de cette transformation est l'unité, comme on le reconnaît aisément : toutes ces vérifications se font en tenant compte des relations (16) entre g' et h et de $g = h + g'$.

En d'autres termes, les transformations ordinaires se réduisent à une transformation T, *de période cinq*, et à ses puissances T^2, T^3, T^4, combinées avec $U = -u$, $V = -v$; et finalement, en vertu du n° **248**, si l'on désigne toujours par Σ_1 la substitution $U = v$, $V = u - v$, toutes les transformations birationnelles de la surface considérée en elle-même sont, au signe près, et à des constantes additives près, comprises dans la formule

$$T^m \Sigma_1^n,$$

m et n étant entiers et m positif et plus petit que 5.

Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles;

PAR M. J. LE ROUX.

1. Les équations aux dérivées partielles du premier ordre et les équations linéaires à deux variables indépendantes d'un ordre quelconque peuvent être, en général, intégrées complètement quand on en connaît une ou plusieurs intégrales particulières satisfaisant à des conditions déterminées. Les formules que j'ai données dans mon Mémoire sur les équations linéaires [1] comprennent autant d'intégrales particulières qu'il y a de caractéristiques; mais les familles de fonctions caractéristiques ne constituent, en général, que des branches différentes d'une même fonction analytique; il en résultera que les intégrales considérées se déduiront de l'une d'entre elles par la même transformation qui permet de passer de la caractéristique correspondante aux autres branches de la même fonction. Les cas où les intégrales sont réellement différentes peuvent donc être considérés comme exceptionnels.

C'est sous le même point de vue que nous envisageons encore dans ce travail le problème général de l'intégration. Nous chercherons à déterminer un nombre limité d'intégrales particulières dont on puisse déduire toutes les autres par un certain mode de génération. Nous

[1] *Journal de Mathématiques*, t. IV, 5e série; 1898.

donnons à ces intégrales élémentaires le nom d'*intégrales primitives* ou *principales* de l'équation considérée. Ce nom d'*intégrale primitive* rappelle leur propriété, présentant une certaine analogie avec celle des éléments primitifs d'un domaine algébrique. Pour les équations du premier ordre, les *intégrales complètes* constituent des *intégrales primitives*. Dans les équations linéaires du second ordre à deux variables indépendantes, l'exemple le plus simple d'une *intégrale primitive* est celle que M. Darboux a obtenue par la généralisation d'une idée de Riemann (¹). Nous avons fait voir qu'à côté de celle-là il en existe une infinité d'autres dont la détermination dépend d'une fonction arbitraire d'une variable, et nous avons étendu cette notion au cas des équations linéaires d'un ordre quelconque à deux variables indépendantes (²).

C'est donc la même notion des intégrales principales et le même mode de représentation que nous étendons aux équations linéaires à plusieurs variables indépendantes. Il était à présumer qu'une généralisation de nos méthodes permettrait d'intégrer à l'aide de solutions convenablement choisies les équations linéaires les plus générales; la difficulté consistait à trouver sous quelle forme on devait effectuer cette généralisation. Les équations à deux variables diffèrent, en effet, des autres par une propriété importante : c'est que les tangentes caractéristiques qui passent en un point y sont séparées comme les asymptotes d'une courbe algébrique, tandis que dans l'espace à plus de deux dimensions on a à considérer des systèmes continus. Par conséquent, les propriétés basées sur cette continuité se trouvent en quelque sorte masquées dans les équations à deux variables.

Nous ramenons l'intégration d'une équation linéaire d'ordre quelconque à n variables indépendantes à la détermination d'une intégrale complète de l'équation des caractéristiques et au calcul d'une ou plusieurs intégrales particulières *primitives* correspondantes.

La connaissance de ces deux éléments permet de représenter toutes les solutions de l'équation considérée par des intégrales à $(n-1)$ dimensions et à limites variables.

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II.

(²) *Annales de l'École Normale*; 1895. — *Journal de Mathématiques*; 1898.

Notre méthode peut se trouver en défaut dans les cas de caractéristiques multiples; cependant, la grande généralité des résultats obtenus permet d'espérer qu'il sera possible de l'adapter à tous les cas à l'aide d'une légère modification.

Si, partant de nos formules, on veut déterminer les éléments qui y figurent de manière à satisfaire à certaines conditions initiales, on est conduit à un problème d'inversion d'intégrale multiple. Nous avons traité ce problème complètement dans un cas simple et nous avons été ainsi conduits à une généralisation intéressante de la notion de la dérivée.

2. *Surfaces et courbes caractéristiques.* — Les propriétés sur lesquelles nous aurons à nous appuyer présentent en quelque sorte le même caractère, quel que soit le nombre des variables indépendantes, pourvu qu'il dépasse deux. Nous en profiterons pour simplifier à la fois le langage et le calcul en nous bornant au cas de trois variables.

Considérons une équation d'ordre m à trois variables indépendantes x, y, z.

$$(1) \qquad \Delta(u) = \sum A_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0 \qquad (0 \leqq \alpha + \beta + \gamma \leqq m).$$

Nous devons commencer par étendre à cette équation la notion des caractéristiques. Comme le fait remarquer M. Goursat [1], cette extension peut se faire de différentes manières suivant la propriété que l'on envisage.

Cependant, la définition la plus naturelle est celle que l'on déduit du théorème de Cauchy généralisé, comme l'a fait M. Beudon [2]. Ces considérations sont d'ailleurs, au fond, équivalentes à celles sur lesquelles s'est appuyé Bäcklund [3] pour la définition des multiplicités

---

(1) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 330.

(2) *Sur les singularités des équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CXXIV); *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles* (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV).

(3) *Mathematischen Annalen*, t. XIII, p. 411.

caractéristiques. Nous appellerons donc *surfaces caractéristiques* de l'équation (1) celles pour lesquelles le théorème de Cauchy est en défaut [1].

Soit $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ l'équation de l'une de ces surfaces; la fonction φ satisfait à l'équation aux dérivées partielles homogène du premier ordre et du $n^{\text{ième}}$ degré.

$$(2) \qquad \sum A_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{\gamma} = 0 \qquad (\alpha+\beta+\gamma = m).$$

Nous appellerons *fonctions caractéristiques* celles qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles (2) et qui, par conséquent, restent constantes sur des surfaces caractéristiques.

Désignons par $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ le premier membre de l'équation (2) et considérons les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}.$$

Si ces dérivées partielles sont constamment nulles sur la surface $\varphi(x, y, z) = k$, nous dirons que c'est une surface caractéristique singulière; si elles sont constamment nulles, quelle que soit k, et cela sans que les coefficients soient simultanément nuls, nous dirons que la fonction φ est une fonction caractéristique multiple. Ce dernier cas se présente toujours si F se décompose en plusieurs facteurs dont l'un au moins soit affecté d'un exposant supérieur à un. Dans le cas de facteurs multiples, nos méthodes peuvent se trouver en défaut.

Les équations

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = 0$$

---

[1] Delassus, Thèse, p. 41, ou *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XII; 1895 (*Supplément*).

ne sont compatibles que si le discriminant $D(x, y, z)$ de la forme homogène F est nul. Quand le discriminant $D(x, y, z)$ s'évanouit identiquement, les équations (3) ont des solutions communes.

Soit

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{R}$$

l'une d'entre elles; si la différentielle totale

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

admet un facteur intégrant, on en déduira une famille de surfaces caractéristiques singulières.

Considérons une surface caractéristique non singulière

$$\varphi(x, y, z) = k.$$

Il existe, sur cette surface, un système de courbes satisfaisant aux équations différentielles

$$(4) \qquad \frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}}.$$

Ce sont les *courbes caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles (2), qui est du premier ordre. Nous les appellerons aussi, par extension, les *courbes caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles proposée (1). On verra, dans la suite de ce Travail, que la considération de ces courbes intervient dans la détermination des intégrales primitives.

Une courbe analytique quelconque C de l'espace étant donnée, on pourra, en général, par cette courbe faire passer m surfaces caractéristiques, ou, si l'on veut, m nappes de surfaces caractéristiques. Les plans tangents à ces m surfaces en un point M de la courbe C passent par la tangente à cette courbe et sont, en outre, tangents au cône (T) de classe m enveloppé par les plans tangents aux surfaces caractéris-

tiques qui passent en ce point [1]. Ces m plans sont donc en général distincts, sauf dans les cas suivants : 1° la courbe C est tangente en M à une courbe caractéristique ; 2° la tangente de la courbe C appartient à un plan tangent multiple du cône ; 3° la fonction $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right)$ admet des facteurs multiples. Le troisième cas rentre d'ailleurs dans le second et tous les deux exigent que le discriminant $D(x, y, z)$ soit nul au point M. Si aucune de ces conditions n'est réalisée en tous les points de C, les m nappes caractéristiques sont distinctes. On pourra les déterminer quand on connaîtra une seule intégrale complète de l'équation (2), pourvu que $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right)$ soit irréductible. Si ce polynome se décompose en plusieurs facteurs, il faudra autant d'intégrales complètes qu'il existe de facteurs différents.

5. *Sur la forme des intégrales complètes.* — La surface caractéristique qui représente une intégrale complète dépend de deux paramètres arbitraires λ et μ. Cherchons s'il est possible de la représenter par une équation de la forme

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = \mu,$$

φ étant rationnelle en λ. Posons, suivant l'usage,

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_z}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = q = -\dfrac{\varphi'_y}{\varphi'_z}. \end{cases}$$

On voit que p et q sont aussi des fonctions rationnelles de λ, quand on regarde x, y, z comme des constantes. Donc la relation algébrique entre p et q,

$$(6) \qquad \Sigma(-1)^\gamma A_{\alpha,\beta,\gamma} p^\alpha q^\beta = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = m),$$

---

[1] *Voir* Goursat, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

doit être de genre zéro en tout point de l'espace. De plus, si l'on suppose qu'à chaque intégrale complète ne correspond qu'une valeur de λ, les fractions rationnelles (5) seront d'ordre m par rapport à ce paramètre.

Supposons maintenant que l'intégrale complète puisse être représentée par une équation de la forme

$$(7) \qquad \varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,$$

algébrique par rapport à λ et μ.

Les équations (5) expriment p et q en fonctions rationnelles de λ et μ; si inversement à une même intégrale complète ne correspond qu'un système de valeurs pour λ et μ, ces deux paramètres s'exprimeront aussi rationnellement en fonction de p et q, et les deux relations algébriques (6) et (7) seront du même genre. Rien ne permet d'affirmer, d'ailleurs, d'après ces remarques sommaires, qu'il existe, pour toute équation aux dérivées partielles de la forme (6), une intégrale de la forme (7).

4. *Détermination des intégrales par leurs valeurs sur les surfaces caractéristiques.* — La propriété d'indétermination relative aux surfaces caractéristiques peut être facilement mise en évidence en prenant pour l'une des variables indépendantes une fonction caractéristique. La méthode suivante conduit au même résultat par un calcul très symétrique. Considérons une surface S quelconque représentée par l'équation analytique $\varphi(x, y, z) = 0$; d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale se trouve déterminée quand on se donne sur cette surface les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}$, pourvu toutefois qu'on exclue les points de la surface qui admettent des tangentes parallèles Ox; le système de ces données est équivalent au suivant, qui est plus symétrique. Formons d'abord l'expression de la différentielle $m^{\text{ième}}$ de u,

$$(8) \qquad d^m u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^m u,$$

puis les expressions suivantes qui en dérivent par formation polaire,

$$(9)\quad d_{p,m-p}u = \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^p \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-p} u,$$
$$p = (0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

λ, μ, ν désignant des constantes, ou même des fonctions de (x, y, z), telles que la direction λ, μ, ν ne soit pas, en général, tangente à la surface.

Supposons que les coordonnées des points de la surface S soient exprimables en fonction de deux paramètres ρ_1 et ρ_2; on aura, pour tout déplacement infiniment petit sur cette surface,

$$(10)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_2} d\rho_2, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_2} d\rho_2. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans les expressions (8) et (9), on obtient, dans les seconds membres, des polynomes homogènes en $d\rho_1$ et $d\rho_2$. Les coefficients des différentes puissances de $d\rho_1$ et $d\rho_2$ dans ces polynomes peuvent être calculés quand on connaît, en tout point de la surface, les valeurs de

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}.$$

Comme ces coefficients sont, d'autre part, des fonctions linéaires et homogènes des dérivées d'ordre m de u, il suffira, pour déterminer complètement ces dérivées, de joindre au système d'équations linéaires déduit des expressions (8) et (9) une nouvelle relation, qui sera justement fournie par l'équation proposée (1).

Les expressions (9) sont formées de termes de la forme

$$\lambda^h \mu^k \nu^l \frac{p!}{h!\,k!\,l!} \frac{(m-p)!}{(\alpha-h)!\,(\beta-k)!\,(\gamma-l)!} \frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} dx^{\alpha-h} dy^{\beta-k} dz^{\gamma-l},$$
$$h + k + l = p, \qquad \alpha + \beta + \gamma = m.$$

Par conséquent, si l'on remplace la dérivée $\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ par $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\beta \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^\gamma$, l'expression (9) devient égale à

$$\left(\lambda \frac{\partial z}{\partial x} + \mu \frac{\partial z}{\partial y} + \nu \frac{\partial z}{\partial z}\right)^p \left(dx \frac{\partial z}{\partial x} + dy \frac{\partial z}{\partial y} + dz \frac{\partial z}{\partial z}\right)^{m-p}.$$

Cette quantité s'annule identiquement quand on y donne à dx, dy, dz les valeurs définies par les équations (10). On tire immédiatement de là cette conséquence : *si l'on considère le déterminant des équations linéaires déduites, comme on l'a indiqué, des équations* (8), (9) *et* (1), *les mineurs de ce déterminant relatifs aux éléments* $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ [coefficients de l'équation (1)] *sont proportionnels aux produits correspondants* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\beta \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^\gamma$, chaque mineur étant pris, bien entendu, avec le signe qui lui correspond dans le développement du déterminant.

La condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant soit nul est donc que l'on ait

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\beta \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^\gamma = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = m),$$

c'est-à-dire que la surface considérée soit une caractéristique.

3. Si l'on prend pour l'une des variables indépendantes une fonction caractéristique, le coefficient de la dérivée correspondante d'ordre m s'annule. Soit x cette variable; on a $A_{m,0,0} = 0$. Les coefficients $A_{m-1,1,0}$, $A_{m-1,0,1}$ ne sont pas nuls à la fois dans tout l'espace, à moins que x ne soit une fonction caractéristique singulière. En général, si x est une fonction caractéristique multiple d'ordre p, les coefficients de toutes les dérivées d'ordre m, dont l'indice par rapport à x dépasse $m-p$, sont nuls, mais il existe au moins une dérivée d'ordre m dont le premier indice est $m-p$, admettant un coefficient différent de zéro.

Considérons l'ensemble des termes d'ordre m dont le premier in-

dice est $m - p$:

$$A_{m-p,p,0}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p} + A_{m-p,p-1,1}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\,\partial y^{p-1}\,\partial z} + \ldots :$$

l'équation aux dérivées partielles qu'on en déduit :

$$A_{m-p,p,0}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p + A_{m-p,p-1,1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{p-1}\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right) + \ldots = 0$$

définit une famille de surfaces coupant les plans $x =$ const. suivant des caractéristiques. On voit qu'en général, sur une surface caractéristique simple, il passe par tout point une seule courbe caractéristique. Au contraire, par tout point d'une surface caractéristique multiple d'ordre p il passe p courbes caractéristiques qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement toutes distinctes. Supposons que, dans le plan $x = x_0$, la droite $y = y_0$ ne soit pas une caractéristique.

Le coefficient $A_{m-p,p,0}$ est alors, *en général*, différent de zéro sur cette droite, de sorte que l'équation (1) pourra être résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p}$.

Cela étant, nous sommes conduits au théorème suivant :

Si le plan $x = x_0$ est une surface caractéristique multiple d'ordre p et que le plan $y = y_0$ coupe le premier suivant une droite non caractéristique, l'intégrale u de l'équation (1) *se trouvera déterminée par les valeurs de*

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-p-1} u}{\partial x^{m-p-1}},$$

données arbitrairement en fonction de y et z sur le plan $x = x_0$, et celles de

$$\frac{\partial^{m-p} u}{\partial x^{m-p}},\quad \frac{\partial^{m-p+1} u}{\partial x^{m-p}\,\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-p}\,\partial y^{p-1}},$$

données en fonctions de x et z sur le plan $y = y_0$.

Ces fonctions initiales et les coefficients de l'équation proposée, ré-

solue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\partial y^p}$, sont supposés holomorphes dans un certain domaine environnant le point x_0, y_0, z_0.

Dans ces conditions, l'intégrale elle-même sera holomorphe dans un domaine assez petit comprenant ce point. Ce sera aussi une fonction holomorphe de x_0, y_0, z_0, et même, si les fonctions initiales dépendent *analytiquement* de certains autres paramètres dont elles soient des fonctions holomorphes, l'intégrale obtenue sera aussi une fonction holomorphe de ces paramètres dans un certain domaine.

L'élégante démonstration donnée par M. Goursat pour le cas de deux variables indépendantes [1] peut se reproduire presque textuellement pour plus de deux variables, pourvu que l'on introduise, au lieu de la seule constante positive α, deux constantes α et β assujetties à des conditions du même genre; on est conduit à chercher une intégrale *majorante* qui dépende de la seule variable

$$\xi = x + \alpha y + \alpha\beta z.$$

Nous renvoyons pour les détails du calcul à l'Ouvrage de M. Goursat.

Des intégrales primitives.

6. *Intégrales doubles à limites variables.* — Dans le cas de deux variables, nous avons vu que l'on peut déduire d'une certaine intégrale particulière $u(x, y, \alpha)$, dépendant d'un paramètre, une intégrale plus générale représentée par la formule

$$U = \int_{\alpha_0}^{\xi} f(\alpha)\, u(x, y, \alpha)\, d\alpha, \tag{11}$$

où la limite ξ est une fonction caractéristique et $f(\alpha)$ une fonction arbitraire. Nous avons été conduits à ce mode de représentation par des considérations ayant leur origine dans la méthode d'approximations

---

[1] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 304.

successives de M. Picard et que nous jugeons inutile de reproduire ici. Nos calculs s'appliquent aussi dans le cas de plusieurs variables indépendantes, mais la solution donnée par la formule (11) ne présente que la généralité des fonctions d'une seule variable [1], c'est-à-dire qu'on peut seulement l'assujettir à prendre des valeurs données à l'avance sur une courbe.

On peut en déduire une solution plus générale de la manière suivante. Dans la formule

$$(12) \qquad U = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(\alpha)\, u(x, y, z, \alpha)\, d\alpha,$$

nous supposons seulement que l'équation $\xi = \alpha$ définit une famille de surfaces caractéristiques. Par conséquent, la fonction ξ pourra encore dépendre d'un autre paramètre β, et l'intégrale obtenue U sera aussi une fonction de ce paramètre. Multipliant par $d\beta$ et intégrant de nouveau entre deux limites fixes, nous en déduisons une nouvelle solution

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} U(x, y, z, \beta)\, d\beta.$$

Or ces deux intégrations successives sont équivalentes au calcul d'une intégrale double de la forme

$$\iint f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

évaluée dans un certain champ à limite variable que nous allons définir et dont le degré de généralité, comme nous le verrons plus loin, est celui des fonctions de deux variables.

Pour représenter le champ d'intégration, nous regarderons α et β comme des coordonnées, x, y, z comme des paramètres. Il résulte du calcul précédent que les limites qui dépendent des variables x, y, z

---

[1] V. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. — Note sur la notion de fonction arbitraire.

dans nos intégrations sont déterminées par l'équation

$$\xi(x, y, z, \beta) = \alpha.$$

Le genre d'intégrales doubles que nous sommes amenés à considérer rentre donc dans la catégorie suivante. Considérons dans le plan $(\alpha\beta)$ une famille de courbes variables dépendant des paramètres x, y, z et que nous supposons représentées par une équation analytique

$$(\Sigma) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha);$$

soit de plus C une courbe fixe telle qu'un arc continu de Σ détermine avec C une aire limitée ACBΣ (*fig.* 1). C'est à cette aire que nous étendrons l'intégrale double

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

A une valeur de α correspond sur l'arc (C) une ordonnée β_0 et sur Σ

Fig. 1.

l'ordonnée $\beta = \varphi(x, y, z, \alpha)$; ces valeurs sont entièrement déterminées si une parallèle à l'axe de β ne rencontre qu'en un seul point chacun des arcs (C), (Σ).

Soient, de plus, α_0, α_1 les abscisses des points A, B; pour le calcul de l'intégrale double, nous prendrons d'abord l'intégrale simple

$$\int_{\beta_0}^{\varphi(x, y, z, \alpha)} f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

en regardant α comme une constante, puis nous intégrerons par rapport à α l'expression obtenue entre les limites α_0 et α_1.

D'après cela, il n'y aura aucune difficulté pour étendre notre calcul au cas des variables imaginaires [1]. Nous dirons que C est la *limite fixe* et Σ la *limite variable* de l'*intégrale double*. Nous n'excluons d'ailleurs pas le cas où tout le contour serait variable.

7. *Application aux équations du second ordre.* — Cherchons les conditions pour qu'une intégrale de la forme précédente satisfasse à l'équation proposée, quelles que soient la fonction arbitraire $f(\alpha, \beta)$ et la limite fixe de l'intégrale.

Nous ferons le calcul d'abord pour les équations du second ordre. Soit

$$(13) \qquad U = \int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Quand on donne à x, y, z des accroissements infiniment petits δx, δy, δz, la limite variable

$$\beta = \varphi(x, y, z, \alpha)$$

subit elle-même un petit déplacement. Faisons correspondre à tout point (α, β) de la première limite un point infiniment voisin $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$ de la seconde. Dans ces conditions, l'accroissement infiniment petit de l'intégrale double est donné par la formule

$$(14) \quad \delta U = \int f(\alpha, \beta)\, u(d\beta\, \delta\alpha - d\alpha\, \delta\beta) + \int\int f(\alpha, \beta)\, \delta u\, d\alpha\, d\beta,$$

où l'on suppose l'intégrale double évaluée dans le même champ que la précédente, l'intégrale simple étant calculée le long de la limite variable dans le sens BA. Nous aurons par conséquent sur cette limite, en considérant seulement la variation δx,

$$d\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\, d\alpha,$$

$$\delta\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\, \delta\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, \delta x.$$

---

[1] Ces remarques ont pour objet de définir avec précision le signe de l'intégrale double. — *Voir* aussi le Mémoire de M. Méray : *Sur les intervalles binaires*, etc. (*Ann. de l'École Normale*, 1899).

L'élimination de $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ entre ces deux équations donne

$$d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,d\alpha\,\delta x.$$

En portant cette valeur dans l'intégrale simple de la formule (14) et divisant par δx, on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,d\alpha - \int\int f(\alpha, \beta)\frac{\partial u}{\partial x}\,d\alpha\,d\beta.$$

On aurait d'ailleurs obtenu directement ce résultat en se basant sur la méthode indiquée au numéro précédent pour le calcul de notre intégrale double.

Passons maintenant au calcul des dérivées secondes; soient $\alpha_0\beta_0$, $\alpha_1\beta_1$ les coordonnées des points A, B.

Posons, pour abréger, f_i, u_i, φ_i au lieu de $f(\alpha_i\beta_i)$, etc. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f_1 u_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - f_2 u_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\\ &\quad + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)d\alpha + \int\int f\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,d\alpha\,d\beta.\end{aligned}$$

Calculons $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}$. Supposons que la limite fixe soit définie par une équation analytique [1]

$$\beta = \psi(\alpha).$$

Dans ce cas, α_i est racine de l'équation

$$\varphi(x, y, z, \alpha) - \psi(\alpha) = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

---

[1] Nos calculs seraient évidemment encore applicables si les deux points A et B appartenaient à deux courbes analytiques différentes.

et, par suite,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}}.$$

L'expression de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ devient donc

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sum \pm \frac{f_i u_i \left(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)^2}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}}$$
$$+ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d\alpha + \int\int f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\alpha\, d\beta.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \sum \pm \frac{f_i u_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}}$$
$$+ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d\alpha + \int\int f \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} d\alpha\, d\beta.$$

Nous avons maintenant une dérivée de chaque type du premier et du second ordre.

Cela posé, considérons l'équation du second ordre

$$\Delta(u) = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 2 A_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$$
$$+ 2 A_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + 2 B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2 B_3 \frac{\partial u}{\partial z} + C u = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée par la fonction U, quelles que soient la fonction arbitraire $f(\alpha, \beta)$ et la limite inférieure de l'intégrale, on devra avoir

$$\Delta(u) = 0, \tag{15}$$

et

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{13}\frac{\partial u}{\partial z}+B_1 u\right)\\ &+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{23}\frac{\partial u}{\partial z}+B_2 u\right)\\ &+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(A_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{23}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial u}{\partial z}+B_3 u\right)\\ &\qquad+\frac{u}{2}\left(A_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\ldots+2A_{23}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad A_{11}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2+\ldots+2A_{23}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=0.$$

L'équation (15) a lieu dans tout le champ d'intégration; elle exprime que $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ est une intégrale particulière de l'équation proposée. L'équation (17) exprime que $\varphi(x, y, z, \alpha_i)$ est une fonction caractéristique, et comme α_i est, en général, variable, la famille de surfaces

$$(S)\qquad \varphi(x, y, z, \alpha)=\beta$$

constituera une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles des surfaces caractéristiques. Enfin, l'équation (16) doit être satisfaite sur la limite variable de l'intégrale double, c'est-à-dire pour l'ensemble des valeurs de x, y, z, α, β liées par l'équation (S). Elle définit donc la condition à laquelle doit satisfaire l'intégrale particulière $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ sur la surface caractéristique (S).

Quand une intégrale $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ vérifiera les conditions précédentes, nous dirons qu'elle est *primitive* ou *principale* relativement aux surfaces caractéristiques du système (S).

8. Si l'on considère $\Delta(u)$ comme un polynome en $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, et que l'on désigne par $\Delta'_x(u), \ldots, \Delta''_{xz}(u), \ldots$, les dérivées premières et secondes de ce polynome prises par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, on a

$$\frac{1}{2}\Delta'_x(u)=A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{13}\frac{\partial u}{\partial z}+B_1 u,\qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\Delta''_{xx}(u)=A_{11}u,\qquad \frac{1}{2}\Delta''_{xy}(u)=A_{12}u,\qquad \ldots.$$

L'équation (16) peut donc s'écrire

$$(16') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta_1(u) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Delta_2(u) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Delta_3(u) + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\Delta_{x^2}(u) + \ldots\right] = 0.$$

Cette équation linéaire du premier ordre doit être intégrée non dans tout l'espace, mais sur la surface caractéristique S. Il faut en déterminer les courbes caractéristiques, qui sont données par les équations différentielles

$$\frac{dx}{A_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{dy}{A_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{dz}{A_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

On voit que ce sont précisément les *courbes caractéristiques* de l'équation considérée situées sur la surface S. Leur détermination ne comporte donc aucune intégration nouvelle. Pour que l'intégrale u soit entièrement déterminée sur S, il suffira donc qu'on en connaisse les valeurs sur une courbe quelconque *non caractéristique* tracée sur cette surface. Soit (T) une surface quelconque qui coupe S suivant une courbe non caractéristique. Si l'on se donne arbitrairement les valeurs de u sur (T), on pourra en déduire par une quadrature la valeur de cette fonction en un point quelconque de (S) d'après l'équation (16) [1]. L'intégrale $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ se trouvera alors complètement déterminée, puisqu'on en connaîtra les valeurs sur une surface caractéristique (S) et sur une autre surface quelconque (T), dont l'intersection avec S n'est pas une courbe caractéristique. On voit donc que *l'intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques dépend d'une fonction arbitraire de deux variables.*

Parmi les intégrales primitives, il en existe une infinité qui sont,

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV (*Note sur l'équation linéaire du premier ordre*).

dans un certain domaine, des fonctions holomorphes de β, développables suivant les puissances de $\beta - \varphi(x, y, z, \alpha)$.

Soit

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = u_0 + \frac{\varphi - \beta}{1} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^2}{1.2} u_2 + \ldots$$

Les coefficients $u_0, u_1, \ldots$, sont donnés par les formules de récurrence suivantes, où l'on a représenté, pour abréger, par $\Delta_\varphi(u)$ le premier membre de l'équation (16)

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_\varphi(u_0) = 0, \\ \Delta_\varphi(u_1) + \Delta(u_0) = 0, \\ \Delta_\varphi(u_2) + \Delta(u_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_\varphi(u_{n+1}) + \Delta(u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array} \right.$$

Il serait facile de vérifier, en partant de ces formules, que l'intégrale primitive satisfait bien aux conditions que nous nous sommes imposées.

9. *Extension aux équations d'ordre supérieur.* — Pour étendre ces propriétés aux équations d'ordre supérieur au second, on peut procéder par un calcul direct, comme nous l'avons fait dans le cas de deux variables [1], et l'on trouve $m - 1$ équations linéaires du premier ordre permettant de calculer successivement les valeurs de u et de ses $m - 2$ premières dérivées *extérieures* sur la *surface caractéristique*

$$(S) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha).$$

Les *courbes caractéristiques* relatives à ces diverses équations sont aussi les courbes caractéristiques de l'équation proposée situées sur (S). Il en résulte, comme dans le cas précédent, que les $m - 1$ fonc-

---

[1] *Journal de Math.*, 5e série, t. IV, p. 386.

tions initiales considérées pourront être déterminées par des quadratures en tout point de S quand on en connaîtra les valeurs sur une courbe quelconque non caractéristique située sur cette surface.

Par suite, l'*intégrale primitive* relative à la famille de surfaces caractéristiques (S) sera définie par ses valeurs sur une surface quelconque (P) dont l'intersection avec (S) ne soit pas une courbe caractéristique.

Pour les intégrales primitives développables suivant les puissances de $\varphi - \beta$, ces conditions sont plus faciles à exprimer lorsqu'on substitue aux dérivées les coefficients du développement, qui forment un système équivalent. Soit

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = u_0 + \frac{\varphi - \beta}{1} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^2}{1.2} u_2 + \ldots,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions de x, y, z, α.

En vertu de la condition imposée aux intégrales primitives, l'expression suivante qui dérive par intégration $u(x, y, z, \alpha, \beta)$

$$\frac{(\varphi - \beta)^{m-1}}{(m-1)!} u_0 + \frac{(\varphi - \beta)^m}{m!} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^{m-1}}{(m+1)!} u_2 + \ldots$$

doit être une nouvelle solution de l'équation proposée.

En y remplaçant u par cette valeur et égalant à zéro successivement les coefficients des différentes puissances de $\varphi - \beta$, on obtient des équations linéaires pour déterminer $u_0, u_1, \ldots$.

L'équation à laquelle doit satisfaire u_0 est de la forme suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum \frac{(m-1)!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\lambda} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{\mu} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{\nu} \Delta^{m-1}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(u_0) + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad [\lambda + \mu + \nu = (m-1)], \end{array} \right.$$

où l'on suppose que $\Delta(u)$ représente le premier membre de l'équation (1), les dérivées symboliques ayant la même signification que dans le cas du second ordre.

Si l'on désigne par $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ le premier membre de l'équation des caractéristiques, l'expression (19) peut se mettre sous la forme

$$(20)\qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial z} + G u_0 = 0.$$

On voit que cette équation est linéaire du premier ordre, et qu'elle admet comme *courbes* caractéristiques les courbes caractéristiques de l'équation proposée.

Pour calculer les autres coefficients, nous aurions des équations de la forme

$$(21)\qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial z} + G u_i + H = 0.$$

H désignant une expression linéaire et homogène par rapport aux $n-1$ coefficients qui précèdent immédiatement u_i et à leurs dérivées.

Tant que les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)},\quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)},\quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}$$

ne sont pas nulles simultanément, nos calculs sont applicables, et l'intégrale primitive existe. Mais, pour les caractéristiques singulières, les expressions précédentes sont en défaut, et il serait nécessaire de faire un examen spécial des différents cas qui peuvent se présenter. Nous ne nous en occuperons pas dans ce travail.

10. *Étude de nos intégrales doubles.* — Il reste à examiner le degré de généralité de la solution obtenue. Cette question nous amène à étudier d'abord les intégrales de la forme

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

pour lesquelles le champ d'intégration est limité par une courbe variable. Le cas le plus simple est celui où la limite variable du champ d'intégration est une droite.

Considérons, dans le plan $(\alpha\beta)$, le triangle OAB déterminé par les axes de coordonnées $O\alpha$, $O\beta$ et la droite variable AB définie par l'équation

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - 1 = 0.$$

L'intégrale double

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

étendue à l'aire du triangle OAB, est évidemment une fonction des coordonnées de la droite AB. Soit $F(u, v)$ cette fonction qui s'annule évidemment lorsque la droite AB passe à l'origine. Je dis qu'à toute fonction $F(u, v)$ holomorphe dans le voisinage de l'origine et s'annulant pour $u = 0$ et pour $v = 0$, on peut faire correspondre une fonction $f(\alpha, \beta)$, telle que l'on ait

$$(22) \qquad F(u, v) = \int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

l'intégrale double étant étendue au triangle AOB.

Posons, en effet,

$$(23) \qquad F(u, v) = \sum A_{m,n} u^{m+1} v^{n+1},$$

et cherchons s'il est possible de satisfaire à l'identité (22) par une fonction holomorphe

$$(24) \qquad f(\alpha, \beta) = \sum B_{m,n} \alpha^m \beta^n.$$

Nous supposerons l'intégrale double toujours calculée de la manière suivante, quelle que soit la position de la droite double : on intègre d'abord par rapport à β de 0 à $v\left(1 - \frac{\alpha}{u}\right)$, puis par rapport à α de 0 à u. Le signe de l'intégrale est alors entièrement défini, et l'on a

$$\int\int \alpha^m \beta^n\, d\alpha\, d\beta = \frac{m!\, n!}{(m+n+2)!} u^{m+1} v^{n+1}.$$

On déduit de là, en vertu des équations (22), (23), (24),

$$B_{m,n} = \frac{(m+n+2)!}{m!\,n!} A_{m,n}.$$

La fonction $f(\alpha, \beta)$ devra donc être représentée par la série

$$(25) \qquad \sum (m+n+2)(m+n+1)\frac{(m+n)!}{m!\,n!} A_{m,n}\alpha^m\beta^n.$$

Le coefficient $\frac{(m+n+2)!}{m!\,n!}$ peut croître indéfiniment avec m et n. La question qui se pose tout d'abord est donc la suivante : En admettant que la série (23) ait un domaine de convergence, en sera-t-il de même de la série (25)? Il est facile de résoudre cette difficulté en considérant la racine $(m+n)^{\text{ième}}$ du coefficient considéré, suivant la règle donnée par Cauchy en 1844 [1] et retrouvée plus tard par M. Hadamard.

On sait que la plus grande valeur de $\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}$, quand on suppose constante la somme $m+n$, a lieu pour $m=n$. D'autre part, on déduit de la formule de Stirling la relation suivante pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{\left(x+\frac{1}{2}\right)}(1+\varepsilon_x),$$

ε_x étant une quantité positive qui s'annule pour $x = \infty$ [2]; d'où, quand m croît indéfiniment,

$$\lim \sqrt[m+n]{\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}} = 2.$$

Il résulte de là que, si, pour $x = x_0$, $y = y_0$, tous les termes de la série (23) ont des valeurs inférieures à une limite fixe, la série (25) sera convergente tant que l'on aura

$$|\alpha| < \frac{|x_0|}{2}, \qquad |\beta| < \frac{|y_0|}{2}.$$

[1] *Exercices d'Analyse*, t. III, p. 390.
[2] Serret, *Calcul intégral*.

Nous allons trouver, d'ailleurs, l'expression de la fonction $f(\alpha, \beta)$ sous forme de résidu.

Remarquons que le coefficient $\frac{(m+n+2)!}{m!\,n!}$ est celui de $x^m y^n$ dans le développement en série entière de la fonction $\frac{1.2}{(1-x-y)^3}$.

Par conséquent, dans le produit des deux séries

$$F(u, v) = \Sigma A_{m,n} u^{m+1} v^{n+1},$$

$$\frac{1.2}{u^2 v^2 \left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3} = \frac{1}{u^2 v^2} \sum \frac{(m+n+2)!}{m!\,n!} \frac{\alpha^m}{u^m} \frac{\beta^n}{v^n},$$

le coefficient de $\frac{1}{uv}$ est justement égal à $f(\alpha, \beta)$.

On peut donc écrire

$$(26) \qquad f(\alpha, \beta) = -\frac{1.2}{4\pi^2} \int \int \frac{F(u, v)\, du\, dv}{\left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3}.$$

les intégrations relatives à u et v étant effectuées suivant des contours fermés entourant respectivement les points $u = 0$ et $v = 0$. Nous devrons, en outre, supposer réalisées les conditions suivantes, qui sont nécessaires pour que nos raisonnements soient applicables : 1° la fonction $F(u, v)$ doit être holomorphe, à l'intérieur de la surface déterminée par l'ensemble de ces deux contours dans l'espace à quatre dimensions des variables complexes; 2° sur les contours d'intégration la fonction $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}}$ doit être développable en série convergente suivant les puissances de $\frac{\alpha}{u}$ et $\frac{\beta}{v}$, ce qui exige que l'on ait

$$\left|\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v}\right| < 1.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $f(\alpha, \beta)$ définie par la formule (25) satisfait bien aux conditions que nous nous sommes im-

posées. Considérons en effet l'intégrale

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \frac{1.2}{4\pi^2}\int\int d\alpha\, d\beta \int\int \frac{F(u, v)\, du\, dv}{\left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

pour laquelle la limite variable du champ d'intégration relatif aux variables α, β est la droite

$$\frac{\alpha}{\xi} + \frac{\beta}{\eta} - 1 = 0.$$

En intervertissant les intégrations relatives aux deux couples de variables (u, v), (α, β), on a d'abord à calculer

$$1.2 \int\int \frac{d\alpha\, d\beta}{\left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

dont la valeur dans le champ considéré est égale à

$$\frac{\xi\eta}{(u - \xi)(v - \eta)\, uv}.$$

L'intégration par rapport à (u, v) nous donne ensuite

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\int \frac{F(u, v)\, \xi\eta\, du\, dv}{(u - \xi)(v - \eta)\, uv} = F(\xi, \eta) - F(0, \eta) - F(\xi, 0) + F(0, 0).$$

Notre formule est donc vérifiée.

La fonction $f(\alpha, \beta)$ peut être regardée comme une sorte de généralisation de la dérivée de $F(u, v)$. En effet, cette fonction du point (α, β) donne naissance à la fonction de droite $F(u, v)$ par une intégration à limite rectiligne variable, exactement comme la dérivée $f'(x)$ permet d'engendrer par intégration la fonction $f(x)$. En outre, la formule qui donne $f(\alpha, \beta)$ présente une remarquable analogie avec celle qui donne, d'après Cauchy, la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

On peut assigner une limite supérieure au module de $f(\alpha, \beta)$. Supposons que l'on prenne comme courbes d'intégration relativement à u

et v des cercles de rayons R, R' ayant pour centres les points $u = 0$ et $v = 0$. Soit M le maximum du module de $F(u, v)$ dans le champ limité par l'ensemble de ces deux courbes, δ le minimum de

$$1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}$$

pour les valeurs de u et de v situées sur les cercles considérés. On a évidemment

$$\operatorname{mod} f(\alpha, \beta) < \frac{2M}{\delta^3 RR'}.$$

11. Nous ne pourrions, sans trop nous écarter de notre sujet, faire dans ce Mémoire une étude complète de ces intégrales doubles. Je me propose de traiter cette question dans un travail à part en me bornant ici à quelques traits essentiels. Sans effectuer l'inversion de notre intégrale double dans le cas général, nous pouvons cependant, d'après ce qui précède et sous certaines réserves, regarder nos intégrales doubles comme jouissant de toute la généralité des fonctions analytiques de deux variables indépendantes, quelle que soit la courbe analytique qui sert de limite fixe, ou les courbes à deux paramètres qui servent de limites variables.

Observons cependant que la généralisation immédiate de la théorie précédente dans le cas des limites curvilignes variables, consiste à prendre comme champ d'intégration le triangle formé par deux courbes fixes de la famille et une courbe variable. Lorsque la limite fixe est une courbe quelconque d'une autre nature, les valeurs de x et de y qui correspondent au cas où la courbe limite variable vient toucher la limite fixe donnent une courbe de points critiques algébriques (courbe de ramification) de la fonction définie par l'intégrale double, si toutefois la fonction *intégrande* $f(\alpha, \beta)$ est holomorphe. Si, dans cette hypothèse, la fonction $f(\alpha, \beta)$ ne s'annule pas identiquement sur la courbe limite fixe, la courbe correspondante décrite par le point (x, y) est, en général, un lieu de zéros d'ordre $\frac{3}{2}$ de l'intégrale. Ce fait ne constitue pas une difficulté réelle au point de vue où nous nous plaçons, car la fonction $f(\alpha, \beta)$ n'est pas *nécessairement* holomorphe dans le voisinage de la courbe limite.

12. Nous allons maintenant montrer que les intégrales de la forme

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

possèdent, sous certaines conditions, le même degré de généralité que les précédentes, où la fonction *intégrande* ne contenait pas les variables x et y. Nous représenterons encore par des droites les limites variables du champ d'intégration.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int\int u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

dont la valeur est une fonction de droite, $\psi(x, y)$. Nous supposerons que l'on puisse lui faire correspondre une fonction $v(\alpha, \beta)$ ne s'annulant pas dans le champ d'intégration et telle que l'on ait

$$\psi(x, y) = \int\int v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Nous dirons, pour abréger, que $v(\alpha, \beta)$ est l'*intégrande* de $\psi(x, y)$.

Soit, d'autre part, $F(x, y)$ une fonction de droite à laquelle corresponde une *intégrande* $\varphi(\alpha, \beta)$ relative au champ considéré

$$F(x, y) = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Il s'agit de démontrer que l'on peut trouver une fonction $f(\alpha, \beta)$ telle que l'on ait

$$\int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Si $u(x, y, \alpha, \beta)$ se réduisait à $v(\alpha, \beta)$, on aurait

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)}.$$

Nous prendrons donc comme première valeur approchée de $f(\alpha, \beta)$

$$f_0(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)}.$$

Considérons la différence

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \iint \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)} u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \\ &= \iint \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)} [v(\alpha, \beta) - u(x, y, \alpha, \beta)]\, d\alpha\, d\beta \\ &= \iint f_0(\alpha, \beta)(v - u)\, d\alpha\, d\beta. \end{aligned}$$

A cette différence correspondra une fonction intégrande $\varphi_1(\alpha, \beta)$, dont nous déduirons une nouvelle fonction $f_1(\alpha, \beta)$ par la formule

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)},$$

puis nous passons de la même manière à une fonction $f_2(\alpha, \beta)$ et ainsi de suite. On a successivement, en représentant par $D(\omega)$ l'intégrande d'une fonction quelconque ω relative à notre champ d'intégration,

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0 &= \frac{DF}{v(\alpha, \beta)}, \\ f_1 &= \frac{D \iint f_0 (v - u)\, d\alpha\, d\beta}{v(\alpha, \beta)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= \frac{D \iint f_{n-1} (v - u)\, d\alpha\, d\beta}{v(\alpha, \beta)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

équations qui sont équivalentes aux suivantes :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint f_0 v\, d\alpha\, d\beta = \iint \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\iint f_n(\alpha, \beta) v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \iint f_{n-1}(v - u)\, d\alpha\, d\beta. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(29)\quad \int\int f_{n+1}\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int v(\alpha, \beta)(f_{n+1} - f_n)\, d\alpha\, d\beta.$$

La série

$$f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots$$

est uniformément convergente pourvu que le champ d'intégration soit suffisamment petit. Soient, en effet,

$$M_{n-1},\quad M_n,\quad \ldots,\quad \mu$$

des limites supérieures des modules de

$$f_{n-1},\quad f_n,\quad \ldots,\quad 1 - \frac{u(x, y, \alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)},$$

S une limite supérieure de l'aire du champ d'intégration : nous aurons, d'après la formule établie au n° **10**,

$$M_n < M_{n-1}\frac{2\mu S}{\delta^2 RR'},$$

lorsque le champ d'intégration est un triangle. Dans le cas général, nous aurons une relation de même forme pourvu qu'il existe, pour le module de l'intégrande $f(\alpha, \beta)$ de la fonction $F(u, v)$ relative au système de limites considérées, une limite supérieure de la forme

$$KM,$$

k dépendant seulement du champ d'intégration et du domaine où F est holomorphe et M étant le module maximum de F. Nous supposons cette condition réalisée et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$M_n < M_{n-1} KS.$$

Il résulte de là que notre série sera uniformément convergente pourvu

que l'on ait

$$KS < 1.$$

Soit $f(\alpha, \beta)$ la somme de la série. Il s'agit de démontrer l'égalité

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Considérons la suite des équations du type (29)

$$\int\int f_0(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_0 - f_1)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\int\int f_1(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_1 - f_2)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\int f_n(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_n - f_{n+1})\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On en tire par addition, en vertu de la convergence uniforme,

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \int\int f_0(\alpha, \beta)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = F(x, y),$$

ce qui démontre notre proposition.

15. Il est facile d'appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à la théorie des équations linéaires.

Considérons le cas des équations du second ordre. Supposons que, par un changement de variable, on ait pris pour plan des xy une surface caractéristique, et prenons dans ce plan un réseau linéaire de courbes quelconques (non caractéristiques) que nous représenterons par une équation de la forme

$$\alpha\xi + \beta\eta + \zeta = 0, \tag{30}$$

α, β désignant des paramètres arbitraires, ξ, η, ζ des fonctions analytiques quelconques des variables x et y, telles cependant que les courbes $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ soient simples, c'est-à-dire que les dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \ldots$ ne s'annulent pas identiquement sur ces courbes.

Par chaque courbe du réseau passe une surface caractéristique autre que le plan des xy et l'ensemble de ces surfaces constitue une intégrale complète que nous représenterons par l'équation

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0. \tag{31}$$

Pour $z = 0$ l'équation (31) admet toutes les solutions de l'équation (30) en α et β. S'il y en a d'autres nous les supposerons en dehors du domaine limité où nous ferons varier les paramètres, et par suite nous excluons aussi les valeurs des variables x, y pour lesquelles cette séparation ne serait plus possible.

Cela posé considérons le triangle formé dans le plan (α, β) par les axes de coordonnées et la courbe définie par l'équation (31). Pour $z = 0$ cette dernière courbe se réduit à la droite (30), du moins dans le domaine limité où nous nous plaçons. Par suite on pourra représenter, pour $z = 0$, par l'intégrale double

$$U = \iint f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{32}$$

étendue à ce triangle, toute fonction holomorphe qui peut être développée en une série de la forme

$$\sum A_{m,n} \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{m+1} \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{n+1}, \tag{33}$$

$u(x, y, z, \alpha, \beta)$ désignant, dans la formule (32), une intégrale primitive relative au système d'intégrales complètes considérées.

Il est évident que le développement (33) ne peut pas donner, même dans un domaine restreint, toutes les fonctions holomorphes des variables x et y s'annulant sur la courbe $\zeta = 0$. Nous compléterons les résultats obtenus en ajoutant à l'intégrale double U des intégrales simples relatives aux deux faisceaux de caractéristiques qui corres-

pondent aux faisceaux de courbes

$$\alpha\xi + \zeta = 0,$$
$$\beta\eta - \zeta = 0.$$

Nous aurons ainsi l'intégrale

$$U_1(x, y, 0) = \int_0^{\frac{\zeta}{\alpha+\xi}} \varphi_1(\alpha)\, u(x, y, 0, \alpha, 0)\, d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\zeta}{\beta+\eta}} \varphi_2(\beta)\, u(x, y, 0, 0, \beta)\, d\beta + U(x, y, 0),$$

qui peut représenter dans un certain domaine toute fonction holomorphe de (x, y) qui s'annule sur la courbe $\zeta = 0$. Si l'on suppose $z = 0$ il faudra remplacer des limites supérieures des deux intégrales simples par celles des racines des deux équations

$$\varphi(x, y, z, \alpha, 0) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, 0, \beta) = 0$$

qui se réduisent respectivement à $\frac{\zeta}{\xi}$ et $\frac{\zeta}{\eta}$ pour $z = 0$. L'intégrale $U_2(x, y, z)$ ainsi obtenue est nulle sur la surface caractéristique S qui coupe le plan des xy suivant la courbe $\zeta = 0$ et se réduit pour $z = 0$ à une fonction arbitraire des variables x et y. En prenant maintenant pour base la surface caractéristique S nous pourrons déterminer de la même façon une intégrale V qui s'annule pour $z = 0$ et qui prenne sur S les valeurs d'une fonction holomorphe quelconque donnée d'avance. L'ensemble de ces deux solutions donnera donc l'intégrale holomorphe la plus générale qui s'annule sur la courbe d'intersection des deux surfaces caractéristiques. Pour compléter la solution du problème il suffira d'ajouter au résultat précédent un terme qui soit susceptible de prendre sur la courbe d'intersection des valeurs choisies d'avance. Nous prendrons pour cela une intégrale relative à un faisceau de surfaces caractéristiques dont aucune ne passe par cette courbe. Tel est, par exemple, le système formé par les surfaces caractéristiques qui

coupent le plan des xy suivant les courbes du faisceau

$$\xi + \lambda\eta = 0.$$

L'intégrale primitive correspondante se déduira en général de

$$u(x, y, z, \alpha, \beta),$$

en y remplaçant β par $\lambda\alpha$ et en faisant ensuite croître α indéfiniment.

En résumé, la solution obtenue comprend *deux intégrales doubles relatives à des réseaux de surfaces caractéristiques à deux paramètres, et des intégrales simples relatives à des faisceaux à un paramètre*, auxquelles on peut ajouter des solutions particulières en nombre limité. Au point de vue de la théorie des fonctions de trois variables, la partie essentielle de la solution est fournie par les intégrales doubles. Nous nous sommes servis pour y arriver de deux réseaux de surfaces caractéristiques et de deux intégrales primitives correspondantes; nous avons dû procéder ainsi pour ramener à la forme linéaire les équations qui définissent les limites de nos intégrales doubles, en vue de l'inversion, mais il est évident que c'est là une nécessité en quelque sorte artificielle, dont nous serions affranchis par une étude plus complète du procédé de représentation.

D'ailleurs, quand on connaît une intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques, on peut en déduire une autre intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques quelconques *enveloppées par les premières*. La démonstration de cette proposition se rattache à la théorie des intégrales doubles envisagée au point de vue que nous avons indiqué et qui fera l'objet d'un prochain Mémoire.

Quand le discriminant de l'équation aux dérivées partielles des caractéristiques est différent de zéro, les surfaces caractéristiques peuvent être toutes considérées comme des enveloppes d'une famille d'intégrales complètes. Dans ce cas, la connaissance d'une seule intégrale primitive suffira pour représenter analytiquement toutes les solutions de l'équation proposée.

L'extension des résultats précédents aux équations d'ordre supérieur

au second ne présente pas de difficulté sérieuse; elle peut se faire en suivant la méthode indiquée dans notre Mémoire *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes* (¹).

14. *Application à quelques exemples.* — I. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

L'équation des surfaces caractéristiques admet l'intégrale complète

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha + z - \beta = 0, \tag{2}$$

α et β désignant des constantes arbitraires, et comme solution primitive correspondante on peut prendre $u = 1$. Au point de vue où nous nous sommes placés l'équation (1) est donc intégrée, puisque nous possédons les éléments nécessaires pour représenter analytiquement toutes les solutions.

II. Prenons ensuite l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - ku = 0,$$

qui peut se ramener à la précédente pour $k = 0$. Nous supposerons k constant. L'équation des surfaces caractéristiques admet l'intégrale complète

$$\alpha x + \frac{y}{\alpha} + z - \beta = 0.$$

Posons

$$Y = \alpha x + \frac{y}{\alpha} + z.$$

Parmi les intégrales primitives relatives à l'intégrale complète con-

(¹) *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV.

sidérée, on a la suivante :

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = 1 + k\alpha \frac{x(Y - \beta)}{1.1} + k^2\alpha^2 \frac{x^2(Y - \beta)^2}{1.2.1.2} + \ldots,$$

qui se rattache aux fonctions de Bessel

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = J_0\left[2\sqrt{k\alpha x(\beta - Y)}\right].$$

Ces éléments suffisent pour représenter toutes les intégrales.

III. Considérons enfin l'équation suivante, qui admet des caractéristiques singulières,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces caractéristiques est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Les surfaces caractéristiques singulières sont des plans parallèles au plan des xy; les autres forment deux séries de cylindres enveloppés respectivement par les deux familles de plans

$$x + \alpha z - \beta = 0,$$
$$y + \alpha z - \beta = 0.$$

Aux plans de la première famille correspond l'intégrale primitive

$$u_1 = e^{\alpha(y+z)+x-\beta}$$

et à ceux de la seconde famille l'intégrale analogue

$$u_2 = e^{\alpha(x+z)+y-\beta}.$$

Remarques. — Dans les pages qui précèdent nous avons seulement

esquissé la méthode générale d'intégration des équations linéaires. Les différentes questions qui se sont présentées dans ces recherches : relations entre les intégrales primitives, application de nos résultats à l'étude des singularités, etc., donneraient lieu à des développements intéressants. Nous y reviendrons.

Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

1. Étant donné un système d'équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous nous proposons d'étudier ses solutions générales,

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

comme fonctions des valeurs initiales $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$. Nous nous plaçons d'abord dans le cas où les variables et les fonctions ne prennent que des valeurs *réelles*.

Pour abréger, nous conviendrons de dire, en regardant $x, y_1, \ldots, y_n$ comme les coordonnées d'un point de l'espace à $n+1$ dimensions, que les équations (2) représentent la *caractéristique* passant par le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$. Considérons en particulier la caractéristique

$$(3) \qquad \bar{y}_i = \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) \equiv \bar{\varphi}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui passe par un point donné $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$, et admettons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions $\bar{\varphi}(x)$ sont continues dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leq l$.

2° Les seconds membres des équations (1) sont des fonctions continues de $x, y_1, \ldots, y_n$ dans le domaine T de l'espace à $n+1$ dimensions défini par les inégalités

$$(4) \qquad |x - \bar{x}_0| \leq l, \qquad |y_1 - \bar{\varphi}_1(x)| + \ldots + |y_n - \bar{\varphi}_n(x)| \leq \rho.$$

3° De plus, ces fonctions satisfont à la *condition de Lipschitz :*

$$|f_i(x, y'_1, \ldots, y'_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < k_1|y'_1 - y_1| + \ldots + k_n|y'_n - y_n|$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$x, y_1, \ldots, y_n$ et $x, y'_1, \ldots, y'_n$ étant deux points quelconques du domaine T et $k_1, \ldots, k_n$ des constantes positives.

Ces conditions supposées remplies, la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz [1] nous apprend que, par chaque point de T, passe une caractéristique et une seule [2], laquelle restera continue tant qu'elle ne sortira pas de ce domaine. Prenons d'abord

$$(5) \qquad x_0 = \bar{x}_0, \qquad y_1^0 = \bar{y}_1^0 + \eta_{11}^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0 + \eta_{1n}^0$$

pour coordonnées du point initial et posons

$$\eta_{ii} = y_i - \bar{y}_i = \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \eta_{11}^0, \ldots, \bar{y}^0 + \eta_{1n}^0) - \varphi_i(x, x_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0).$$

Nous aurons

$$(6) \quad \frac{d\eta_{ii}}{dx} = f_i(x, \bar{y}_1 + \eta_{11}, \ldots, \bar{y}_n + \eta_{1n}) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 291, et *Comptes rendus*, juin 1899. — P. Painlevé, *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXVII, p. 149.

(2) Pour ce dernier point, *voir* le Mémoire de l'auteur inséré dans le *Journal de Mathématiques*, t. X, p. 117; 1894.

d'où il suit, en vertu de l'hypothèse 3°,

$$\left|\frac{d\eta_i}{dx}\right| < k_1|\eta_1| + \ldots + k_n|\eta_n| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou encore, en ajoutant ces inégalités et désignant par K le plus grand des nombres k,

$$\left|\frac{d}{dx}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|)\right| \leqq \left|\frac{d\eta_1}{dx}\right| + \ldots + \left|\frac{d\eta_n}{dx}\right| < n\mathrm{K}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|),$$

et, par suite, en intégrant,

$$(7) \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < (|\eta_1^0| + \ldots + |\eta_n^0|)\, e^{n\mathrm{K}|x - \bar{x}_0|},$$

inégalité qui subsistera certainement tant que la caractéristique passant par le point (5) restera comprise dans le domaine T, c'est-à-dire tant qu'on aura

$$|x - \bar{x}_0| \leqq l, \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \rho.$$

Or, si nous imposons aux quantités η^0 la condition

$$(8) \qquad |\eta_1^0| + \ldots + |\eta_n^0| < \rho\, e^{-n\mathrm{K}l},$$

le second membre de (7) restera inférieur à ρ dans tout l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$. Il en sera donc de même du premier membre; car celui-ci, étant inférieur à ρ pour $x = \bar{x}_0$, ne saurait atteindre la valeur ρ, pour une valeur x dans l'intervalle considéré, qu'après avoir dépassé le second membre, et, d'autre part, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, le premier membre de (7) ne saurait dépasser le second, pour $|x - \bar{x}_0| < l$, qu'après avoir atteint la valeur ρ. Donc, *la caractéristique passant par le point* $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0 + \eta_n^0$ *restera comprise dans le domaine* T *et assujettie à l'inégalité* (7) *pour* $|x - \bar{x}_0| \leqq l$, *dès que la condition* (8) *sera remplie.*

Cette conclusion se généralise de suite en substituant au point

$\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$ un point quelconque de la caractéristique (3). Nous arrivons ainsi au résultat suivant, dont nous aurons à faire un usage continuel :

La caractéristique passant par un point quelconque $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ du domaine T_0 défini par les inégalités

$$(9)\qquad \begin{cases} |x - \bar{x}_0| \leqq l, \\ |y_1 - \bar{\varphi}_1(x)| + \ldots + |y_n - \bar{\varphi}_n(x)| < \varrho e^{-nk(|x - \bar{x}_0|)}, \end{cases}$$

reste comprise à l'intérieur du domaine T et assujettie à la condition

$$(10)\qquad \sum_1^n |y_i - \bar{\varphi}_i(x)| < \sum_1^n |y_i^0 - \bar{\varphi}_i(x_0)| e^{nk|x - \bar{x}_0|}$$

pour toutes les valeurs x appartenant à l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$.

2. D'après cela nous pouvons affirmer que les solutions (2) sont des fonctions bien définies de $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, pour x dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$ et $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine T_0. Nous allons faire voir que ce sont des fonctions continues.

Considérons à cet effet la caractéristique passant par un point $\bar{x}_0 + \Delta x_0, \bar{y}_1^0 + \Delta y_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0 + \Delta y_n^0$ compris dans le domaine T_0 et voisin du point $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$, et posons

$$\eta_i = \varphi_i(x, \bar{x}_0 + \Delta x_0, \bar{y}_j^0 + \Delta y_j^0) - \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0).$$

Le théorème ci-dessus nous donne, pour $|x - \bar{x}_0| \leqq l$,

$$|\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \sum_1^n |\bar{y}_i^0 + \Delta y_i^0 - \bar{\varphi}_i(\bar{x}_0 + \Delta x_0)| e^{nk|x - \bar{x}_0 - \Delta x_0|}.$$

Mais, en désignant par M la plus grande valeur absolue des seconds membres des équations (1) dans le domaine T, on a

$$|\bar{y}_i^0 - \bar{\varphi}_i(\bar{x}_0 + \Delta x_0)| = |\bar{\varphi}_i(\bar{x}_0) - \bar{\varphi}_i(\bar{x}_0 + \Delta x_0)| < M|\Delta x_0|.$$

Il vient donc

$$|\eta_{i1}|+\ldots+|\eta_{in}|<(|\Delta y_1^0|+\ldots+|\Delta y_n^0|+nM|\Delta x_0|)e^{nK|x-\bar{x}_0|},$$

et comme on a d'ailleurs, pour $|x+\Delta x-\bar{x}_0|\leq l$,

$$|\xi_i|=|\varphi_i(x+\Delta x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)-\varphi_i(x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)|<M|\Delta x|,$$

nous trouvons enfin l'inégalité

$$\begin{aligned}&\sum_1^n|\varphi_i(x+\Delta x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)-\varphi_i(x,\bar{x}_0,\bar{y}_j^0)|\\&\quad=\sum_1^n|\eta_{i}+\xi_i|\leq\sum_1^n(|\eta_{i}|+|\xi_i|)\\&\quad<(|\Delta y_1^0|+\ldots+|\Delta y_n^0|+nM|\Delta x_0|)e^{nK|x-\bar{x}_0|}+nM|\Delta x|,\end{aligned}$$

qui nous montre que les solutions (2) sont des fonctions continues de $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ pour

$$|x-\bar{x}_0|\leq l,\qquad x_0=\bar{x}_0,\qquad y_1^0=\bar{y}_1^0,\qquad\ldots,\qquad y_n^0=\bar{y}_n^0.$$

Mais ce résultat s'étend immédiatement à tout système de valeurs $x_0, y_1^0, \ldots, y_n$ représentant un point du domaine T_0 (9). En effet, les raisonnements et les conclusions qui précèdent restent encore valables si, à la caractéristique (3), nous substituons une caractéristique quelconque passant par un point de T_0, puisque, d'après le n° 1, une telle caractéristique reste comprise à l'*intérieur* du domaine T pour $|x-\bar{x}_0|<l$. Nous avons donc démontré ce théorème :

En admettant les hypothèses énoncées au n° 1, les solutions des équations (1) qui, pour $x=x_0$, prennent respectivement les valeurs $y_1^0, \ldots, y_n^0$, sont des fonctions continues de $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, tant que la variable x restera dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0|\leq l$ et le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine T_0.

5. Considérons en second lieu un système d'équations différentielles

$$(11)\qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \equiv f_i(x, y_j, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où figure un paramètre arbitraire μ, et soient

$$(12)\qquad y_i = \varphi_i(x, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de la caractéristique passant par le point $x_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$. Nous allons étudier les φ comme fonctions du paramètre μ, en faisant les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions

$$\bar{y}_i = \varphi_i(x, 0) \equiv \bar{\varphi}_i(x)$$

sont continues pour $|x - \bar{x}_0| \leq l$.

2° Les seconds membres des équations (11) sont des fonctions continues de $x, y_1, \ldots, y_n$ et μ pour les valeurs $x, y_1, \ldots, y_n$ comprises dans le domaine T, (4), et pour $|\mu| \leq r$.

3° Ces fonctions vérifient, en outre, les inégalités

$$|f_i(x, y'_j, \mu) - f_i(x, y_j, \mu)| < k_1 |y'_1 - y_1| + \ldots + k_n |y'_n - y_n|,$$

$x, y_1, \ldots, y_n$ et $x, y'_1, \ldots, y'_n$ étant deux points quelconques du domaine T et μ inférieur ou égal à r, en valeur absolue.

En faisant comme plus haut

$$\eta_i = y_i - \bar{y}_i = \varphi_i(x, \mu) - \varphi_i(x, 0),$$

nous aurons

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dx} &= f_i(x, \bar{y}_1 + \eta_1, \ldots, \bar{y}_n + \eta_n, \mu) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0) \\ &= \left[f_i(x, \bar{y}_j + \eta_j, \mu) - f_i(x, \bar{y}_j, \mu)\right] \\ &\quad + \left[f_i(x, \bar{y}_j, \mu) \qquad - f_i(x, \bar{y}_j, 0)\right] \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Soit $m(\delta)$ la plus grande valeur absolue des expressions

$$f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \mu) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour $|x - \bar{x}_0| \leq l$, $|\mu| \leq \delta (< r)$; l'égalité précédente nous donnera

$$\left|\frac{d\eta_i}{dx}\right| < k_1|\eta_1| + \ldots + k_n|\eta_n| + m(\delta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou en ajoutant, et désignant toujours par K le plus grand des nombres k,

$$\left|\frac{d}{dx}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|)\right| < \left|\frac{d\eta_1}{dx}\right| + \ldots + \left|\frac{d\eta_n}{dx}\right|$$
$$< n\mathrm{K}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|) + nm(\delta),$$

d'où l'on tire, en observant que les η_i s'annulent pour $x = \bar{x}_0$,

$$(14) \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \frac{m(\delta)}{\mathrm{K}}(e^{n\mathrm{K}|x - \bar{x}_0|} - 1),$$

inégalité qui subsistera certainement tant qu'on aura

$$|\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \rho, \qquad |\mu| \leq \delta, \qquad |x - \bar{x}_0| \leq l.$$

Or, puisque la quantité $m(\delta)$, en vertu de l'hypothèse 2°, tend vers zéro en même temps que δ, nous pouvons trouver une valeur δ_0 telle que

$$\frac{m(\delta_0)}{\mathrm{K}}(e^{n\mathrm{K}l} - 1) \leq \rho, \qquad \delta_0 \leq r.$$

Le second membre de (14) restera donc inférieur à ρ pour

$$|x - \bar{x}_0| < l, \qquad |\mu| \leq \delta_0,$$

et, par suite, nous arrivons à cette conclusion que *la caractéristique* (12) *restera enfermée dans le domaine* T *et assujettie à l'inégalité* (14) *pour toutes les valeurs* x *comprises dans l'intervalle* $|x - \bar{x}_0| < l$, *dès qu'on aura* $|\mu| \leq \delta_0$.

Les quantités η_i tendant dès lors uniformément vers zéro dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0| \leq l$, lorsque μ tend vers zéro, on voit que les solutions (12) sont des fonctions continues de x et μ pour $|x-\bar{x}_0| \leq l$, $\mu = 0$. Mais, d'après les résultats ci-dessus, cette conclusion s'applique aussi bien à toute autre valeur μ telle que $|\mu| \leq \delta_0$, et nous pouvons donc énoncer encore cet autre résultat :

Sous les conditions énumérées plus haut, les solutions (12) *du système* (11) *sont des fonctions continues de x et μ dans les intervalles $|x-\bar{x}_0| \leq l$, $|\mu| \leq \delta_0$.*

Remarque. — Les propositions que nous venons de démontrer s'étendent immédiatement au cas où les seconds membres des équations (11) dépendent d'un nombre quelconque de paramètres arbitraires. On pourrait en déduire aisément les résultats des n^{os} **1** et **2**, mais pour rendre l'exposition plus claire, nous avons préféré suivre l'ordre du texte.

4. Appliquons le résultat précédent aux équations linéaires

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} = F_{i0}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + y_1 F_{i1}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + \ldots \\ + y_n F_{in}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

en supposant que les F sont des fonctions continues de x et des paramètres $\mu_1, \ldots, \mu_p$, tant que x restera dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0| \leq l$, et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ dans certains intervalles dont nous désignerons l'ensemble par (μ). D'après la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires, laquelle est une conséquence immédiate de la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz, les solutions du système (15) qui, pour $x = \bar{x}_0$, prennent des valeurs constantes quelconques $y_1^0, \ldots, y_n^0$, peuvent être présentées sous la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} y_i = \psi_{i0}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + y_1^0 \psi_{i1}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + \ldots \\ + y_n^0 \psi_{in}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) \\ \psi_{ii} = 1, \ \psi_{ik} = 0 \text{ pour } x = \bar{x}_0 \ i \neq k. \end{aligned}\right.$$

les ψ étant des fonctions continues de x pour $|x - \bar{x}_0| < l$, quels que soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ dans les intervalles (μ). En désignant par $\mu_1^0, \ldots, \mu_p^0$ un système quelconque de valeurs comprises dans ces intervalles, on voit dès lors que les équations (15) satisfont à toutes les hypothèses énoncées au n° 5, pour $|x - \bar{x}_0| < l$, $|\mu_1 - \mu_1^0|, \ldots, |\mu_p - \mu_p^0|$ inférieurs à certaines limites, et $y_1, \ldots, y_n$ compris dans des intervalles finis quelconques. Donc, d'après le résultat du numéro cité, les expressions (16), ou bien les $\psi(x, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ sont des fonctions continues de $x, \mu_1, \ldots, \mu_p$ pour x dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| < l$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ dans un certain voisinage des valeurs $\mu_1^0, \ldots, \mu_p^0$, et comme ces valeurs étaient choisies arbitrairement dans les intervalles (μ), nous obtenons par suite le théorème que voici :

Si les seconds membres des équations linéaires (15) *sont des fonctions continues de* $x, \mu_1, \ldots, \mu_p$ *pour* $|x - \bar{x}_0| \leqq l$ *et pour les valeurs* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *comprises dans certains intervalles, il en est de même des solutions de ces équations qui, pour* $x = \bar{x}_0$, *prennent des valeurs constantes quelconques.*

5. Retournons aux équations (1), en adoptant la notation et les hypothèses du n° 1 mais supposant, en outre, que *les seconds membres de* (1) *admettent des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n$ *qui sont des fonctions continues de* $x, y_1, \ldots, y_n$ *dans le domaine* T. Dans ces conditions, nous allons démontrer que les solutions générales (2) de nos équations ont, par rapport à $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, des dérivées du premier ordre, continues pour x dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| < l$ et $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine T_0.

Nous partons des équations (6) que nous écrivons sous la forme [1]

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= y_{i1} F_{i1}(x, y_{11}^0, \ldots, y_{1n}^0) + \ldots + y_{in} F_{in}(x, y_{11}^0, \ldots, y_{1n}^0) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \right.$$

[1] *Cf.* la Note de M. Hadamard, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXVIII, p. 64), Note dont nous n'avons eu connaissance qu'après avoir livré le manuscrit de ce Mémoire.

en posant (pour abréger, nous écrivons y_i au lieu de $\bar{y}_i + \eta_{ii}$)

$$F_{i1} = \frac{1}{\eta_{i1}}\left[f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, y_2, \ldots, y_n)\right],$$

$$F_{i2} = \frac{1}{\eta_{i2}}\left[f_i(x, \bar{y}_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3, \ldots, y_n)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{in} = \frac{1}{\eta_{in}}\left[f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n)\right].$$

Ces expressions sont des fonctions continues de x, $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0$ pour x dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leq l$ et pour les valeurs $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0$ satisfaisant à l'inégalité (8). En effet, pour ces valeurs de x et des η^0, les y et les η sont, d'après le n° **2**, des fonctions continues, et les points dont les coordonnées sont respectivement $x, y_1, \ldots, y_n$; $x, \bar{y}_1, y_2, \ldots, y_n$; ...; $x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ restent compris à l'intérieur du domaine T. D'après les hypothèses du n° **1**, les expressions entre crochets ci-dessus seront donc aussi continues, et, par suite, la fonction F_{ik} sera certainement continue pour les valeurs $x, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0$ qui n'annulent pas η_{ik}. Mais, d'autre part, le théorème des accroissements finis nous donne

$$F_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \ldots, \bar{y}_{k-1}, y_k + \theta\eta_{ik}, y_{k+1}, \ldots, y_n) \qquad (0 < \theta < 1),$$

d'où nous concluons, en vertu de l'hypothèse faite au début de ce numéro, que la fonction F_{ik} est encore continue pour les valeurs x, $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0$ annulant η_{ik} et comprises dans les intervalles indiqués. Notre proposition est donc démontrée.

Dès lors, nous aurons, en appliquant aux équations (17) le résultat du n° **4**,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_{ii} &= \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \eta_{11}^0, \ldots, \bar{y}_n^0 + \eta_{in}^0) - \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) \\ &= \eta_{11}^0\psi_{i1}(x, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0) + \ldots + \eta_{in}^0\psi_{in}(x, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0) \\ &(\psi_{ii} = 1, \psi_{ik} = 0 \text{ pour } x = \bar{x}_0;\ i, k = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq k), \end{aligned}\right.$$

les ψ étant des fonctions continues de $x, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{in}^0$ pour $|x - \bar{x}_0| \leq l$

et pour les valeurs $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0$ satisfaisant à l'inégalité (8). Donc, les différences

$$\psi_{ik}(x, \eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0) - \psi_{ik}(x, 0, \ldots, 0) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

tendront (uniformément) vers zéro avec $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0$, pour $|x - \bar{x}_0| \leq l$, et, par suite, nous pouvons tirer des équations (18) cette conclusion que *les fonctions* $\varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *ont, pour* $|x - \bar{x}_0| \leq l$, $x_0 = \bar{x}_0$, $y_1^0 = \bar{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0$, *des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1^0, \ldots, y_n^0$, dont les valeurs sont

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) = \psi_{ik}(x, 0, \ldots, 0) \equiv \bar{\psi}_{ik}(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient évidemment les fonctions $\bar{\psi}_{1k}, \bar{\psi}_{2k}, \ldots, \bar{\psi}_{nk}$, en intégrant les équations linéaires

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) Y_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) Y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec les conditions initiales

$$Y_k = 1, \quad Y_1 = \ldots = Y_{k-1} = Y_{k+1} = \ldots = Y_n = 0, \quad \text{pour} \quad x = \bar{x}_0.$$

Quant au paramètre x_0, nous faisons remarquer qu'on a identiquement

$$\varphi_i(x, \bar{x}_0 + \Delta x_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) = \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \Delta y_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0 + \Delta y_n^0),$$

les Δy^0 désignant des quantités qui tendent vers zéro avec Δx_0 de telle manière que

$$\lim \frac{\Delta y_i^0}{\Delta x_0} = -f_i(\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Écrivons cette identité sous la forme

$$\frac{\varphi_i(x, \bar{x}_0 + \Delta x_0, \bar{y}_j^0) - \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0)}{\Delta x_0} = \frac{\varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0 + \Delta y_j^0) - \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0)}{\Delta x_0}.$$

Lorsque Δx_0 tendra vers zéro, le second membre aura pour limite

$$-\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1^0}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0) f_1(\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n^0}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_j^0) f_n(\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0)\right],$$

et, par suite, *cette expression représente la dérivée de la fonction* $\varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *par rapport à* x_0, *pour* $x_0 = \bar{x}_0$, $y_1^0 = \bar{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0$, $|x - \bar{x}_0| \leq l$.

6. Les résultats que nous venons d'établir pour $x_0 = \bar{x}_0$, $y_1^0 = \bar{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0$, s'étendent immédiatement à un point quelconque x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ du domaine T_0. Il n'y a, en effet, qu'à recommencer la démonstration précédente en y substituant à la caractéristique (3) celle qui passe par le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ qu'on considère. Nous arrivons ainsi au théorème suivant, qui résume les principaux résultats acquis jusqu'à présent :

Si les seconds membres des équations (1) *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n$ *sont continus dans le domaine* T, *les solutions* (2) *de ces équations qui, pour* $x = x_0$, *prennent respectivement les valeurs* $y_1^0, \ldots, y_n^0$, *sont des fonctions continues de* $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *et admettent, par rapport à toutes ces quantités, des dérivées du premier ordre elles-mêmes continues, tant que* x *restera dans l'intervalle* $|x - \bar{x}_0| \leq l$ *et* $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *dans le domaine* T_0.

Les dérivées de ces solutions par rapport à y_k^0 *s'obtiennent en intégrant les équations linéaires*

$$(19) \quad \frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) Y_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) Y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions initiales

$$Y_k = 1, \qquad Y_1 = \ldots = Y_{k-1} = Y_{k+1} = \ldots = Y_n = 0, \qquad \text{pour } x = x_0.$$

Les dérivées prises par rapport à x_0 s'expriment en fonction des dérivées précédentes par les formules

$$(20)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} = -\left[f_1(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1^0} + \ldots + f_n(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n^0}\right].$$

Enfin, on aura évidemment

$$(21)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

La continuité des dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}$ résulte immédiatement du n° 4, si l'on observe que les équations linéaires (19) [les *équations aux variations* du système (1), suivant la terminologie de M. Poincaré] ont leurs coefficients continus pour les valeurs $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ comprises respectivement dans l'intervalle $|x - \overline{x}_0| \leqq l$ et dans le domaine T_0. D'après l'égalité (20), on en conclut la continuité des dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$, et celle des dérivées par rapport à x, enfin, est mise en évidence par l'expression (21).

7. Puisqu'une caractéristique est déterminée d'une manière univoque par l'un quelconque de ses points, tant que nous restons dans le domaine T, les fonctions $\varphi(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ne changent pas de valeur lorsque le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ se déplace le long d'une caractéristique. Donc, en donnant à x une valeur fixe quelconque $\overline{x}$ appartenant à l'intervalle $|x - \overline{x}_0| \leqq l$, et mettant $x, y_1, \ldots, y_n$ à la place de $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, les fonctions

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi_i(\overline{x}, x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seront, d'après la définition même, des *intégrales* du système (1). Ces intégrales sont d'ailleurs indépendantes entre elles, puisqu'on a identiquement

$$F_i(\overline{x}, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi_i(\overline{x}, \overline{x}, y_1, \ldots, y_n) = y_i,$$

et satisfont, d'après l'égalité (20), à l'équation aux dérivées partielles

$$(22)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Nous pouvons donc encore présenter notre résultat sous cette forme :

Si les fonctions $f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ et leurs dérivées du premier ordre par rapport à $y_1, \ldots, y_n$ sont continues dans le domaine T, *l'équation aux dérivées partielles* (22) *admet n intégrales indépendantes qui se réduisent respectivement à $y_1, \ldots, y_n$ pour $x = \bar{x}$, $(\bar{x}_0 - l < \bar{x} < \bar{x}_0 + l)$, et qui restent continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, pour les valeurs $x, y_1, \ldots, y_n$ comprises dans le domaine* T_0.

Les théorèmes que nous venons d'établir jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'Analyse, notamment le Calcul des variations et l'étude *qualitative* des courbes définies par les équations différentielles, dans la voie ouverte par M. Poincaré. Pour qu'on puisse tirer parti de ces théorèmes, il est nécessaire de les démontrer, comme nous l'avons fait ci-dessus, pour tout domaine où les caractéristiques sont continues et dans lequel les équations différentielles satisfont aux conditions requises.

Les démonstrations données antérieurement par MM. Picard [1] et Bendixson [2] ne s'appliquent, directement, qu'à un domaine assez restreint. Il nous semble d'ailleurs que la méthode que nous avons suivie, tout en conduisant à des résultats plus étendus et plus précis, présente encore l'avantage d'être plus simple et plus intuitive et de se rattacher étroitement aux principes élémentaires du Calcul infinitésimal.

8. Reprenons encore les équations (11) du n° **5**, en gardant les deux premières hypothèses de ce numéro, mais remplaçant l'hypothèse 3° par la suivante :

---

[1] *Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles* : Note insérée dans le Tome IV des *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, par M. G. Darboux.

[2] *Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaire* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXIV).

Les seconds membres des équations (11) *ont des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n$ *et* μ, *qui restent continues pour* $|\mu| \leq r$ *et pour* $x, y_1, \ldots, y_n$ *dans* T. Soit, pour ces valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n, \mu$,

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \ldots, y_n, \mu)\right| \leq K, \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, y_1, \ldots, y_n, \mu)\right| \leq M$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

La quantité désignée plus haut par $m(\delta)$ pourra être remplacée par le produit $M\delta$, ce qui nous permettra tout d'abord de présenter le résultat du numéro cité sous la forme plus précise que voici :

Les solutions (12) *des équations* (11) *sont des fonctions continues de* x *et* μ, *et la caractéristique qu'elles représentent reste à l'intérieur du domaine* T, *pour les valeurs de* x *et de* μ *comprises dans les intervalles*

$$(23) \qquad |x - \bar{x}_0| \leq l, \quad |\mu| < \text{la plus petite des quantités } \frac{K\delta}{M(e^{nKl} - 1)} \text{ et } r.$$

Revenons maintenant aux équations (13). En tenant compte de l'hypothèse ci-dessus et répétant le raisonnement donné au n° 5, nous pouvons les écrire sous cette forme

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_i}{dx} = \mu F_{i0}(x, \mu) + \eta_1 F_{i1}(x, \mu) + \ldots + \eta_n F_{in}(x, \mu) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}$ étant des fonctions continues de x et μ, pour les valeurs (23), qui, pour $\mu = 0$, se réduisent respectivement à

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0),$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0).$$

En appliquant à ces équations le théorème démontré au n° 4, et observant que les η_i s'annulent pour $x = \bar{x}_0$, nous aurons donc

$$\eta_i = \varphi_i(x, \mu) - \varphi_i(x, 0) = \mu\psi_i(x, \mu),$$

les $\psi(x, \mu)$ étant des fonctions continues de x et μ dans les intervalles (23), s'annulant pour $x = \bar{x}_0$. Ces égalités nous montrent que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ admettent des dérivées partielles par rapport à μ, pour $\mu = 0$, $|x - \bar{x}_0| \leq l$,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu}(x, 0) = \psi_i(x, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dérivées qu'on obtient en intégrant les équations linéaires

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{y}_j, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \bar{y}_j, 0)Y_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \bar{y}_j, 0)Y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions initiales :

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

pour $x = \bar{x}_0$. Mais, par un raisonnement déjà répété à plusieurs reprises, ce résultat s'étend immédiatement à toutes les valeurs x, μ appartenant aux intervalles (23), de sorte que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

En supposant que les seconds membres des équations (11) *ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n, \mu$ *sont des fonctions continues de* $x, y_1, \ldots, y_n, \mu$ *pour* $x, y_1, \ldots, y_n$ *dans le domaine* T *et pour* $|\mu| \leq r$, *les solutions* (12) *de ces équations qui, pour* $x = \bar{x}_0$, *prennent respectivement les valeurs* $\bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$, *sont des fonctions continues de* x *et* μ *dans les intervalles* (23) *et admettent par rapport à* μ (*et à* x) *des dérivées partielles du premier ordre continues dans les mêmes intervalles. On obtient ces*

dérivées en intégrant les équations linéaires

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dY_i}{dx} = \dfrac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \eta_j, \mu) + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \eta_j, \mu) Y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \eta_j, \mu) Y_n \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales :

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

pour $x = \bar{x}_0$.

La continuité des dérivées résulte de ce que les seconds membres des équations linéaires (25) sont des fonctions continues de x et μ dans les intervalles (23).

9. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des quantités réelles, mais la méthode dont nous nous sommes servi pour établir les théorèmes énoncés plus haut, nous permet de les étendre immédiatement au cas où l'on a affaire à des fonctions analytiques de variables complexes. En effet, les propositions que nous avons empruntées à la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz restent encore vraies dans ce cas, et, en parcourant les raisonnements qui précèdent, on verrait dès lors qu'ils subsistent encore, avec une légère modification du langage, qui, d'ailleurs, servirait à rendre l'exposition plus simple.

Ainsi, supposons que les seconds membres des équations (1) soient des fonctions continues de x et des fonctions analytiques holomorphes de $y_1, \ldots, y_n$, pour les valeurs réelles de x et les valeurs réelles ou complexes de $y_1, \ldots, y_n$ satisfaisant aux conditions (4). En suivant la même marche que plus haut, on arrive à cette conclusion que les solutions des équations (1) qui, pour $x = \bar{x}_0$, prennent respectivement les valeurs $y_1^0 = \bar{y}_1^0 + \eta_{11}^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0 + \eta_{1n}^0$, sont des fonctions continues de $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0$ et admettent par rapport à ces quantités des dérivées du premier ordre également continues, pour les valeurs réelles ou complexes de $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0$ satisfaisant à la condition (8), x ayant une valeur réelle quelconque dans l'intervalle $(\bar{x}_0 - l, \bar{x}_0 + l)$. Donc, *les solutions dont il s'agit sont des fonctions analytiques de* $\eta_{11}^0, \ldots, \eta_{1n}^0$ *holomorphes tant que ces quantités satisfont à l'inégalité* (8), *quel que soit* x *dans l'intervalle* $(\bar{x}_0 - l, \bar{x}_0 + l)$.

De même, les considérations des n°s 5 et 8 nous conduisent au théorème suivant [1] :

Soit donné un système d'équations différentielles

$$(26) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dépendant d'un paramètre arbitraire μ, *et soient*

$$\overline{y}_i = \overline{\varphi}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de la caractéristique passant par le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *et correspondant à la valeur* $\mu = 0$. *Faisons les hypothèses suivantes :*

1° *Les fonctions* $\overline{\varphi}_i(x)$ *sont continues pour* $x_0 \leq x \leq x_0 + l$;

2° *Les seconds membres des équations* (26) *sont des fonctions continues de* x *et des fonctions analytiques holomorphes de* $y_1, \ldots, y_n$ *et du paramètre* μ, *pour les valeurs réelles de* x *et les valeurs réelles ou complexes de* $y_1, \ldots, y_n$ *et de* μ *comprises respectivement dans les domaines*

$$(27) \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + l, \quad |y_1 - \overline{\varphi}_1(x)| + \ldots + |y_n - \overline{\varphi}_n(x)| < \rho, \quad |\mu| < r.$$

Ces conditions supposées remplies, les solutions des équations (26) *correspondant aux valeurs initiales* $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$ *sont des fonctions analytiques du paramètre* μ, *holomorphes tant qu'on aura*

$$(28) \qquad |\mu| < \text{la plus petite des quantités } \frac{K\rho}{M(e^{nKl} - 1)} \quad \text{et} \quad r \text{ [2]},$$

quel que soit x *dans l'intervalle* $(x_0, x_0 + l)$, K *et* M *désignant les*

---

[1] *Cf.* Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II.

[2] On est conduit à la même limite en démontrant le théorème dont il s'agit par la méthode des approximations successives (*Cf.* page 145 de notre Mémoire cité plus haut).

modules maxima des expressions

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

respectivement

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour les valeurs (27).

On voit, en effet, en appliquant au cas présent les raisonnements du n° **8**, que les solutions dont il s'agit sont des fonctions continues de μ ayant des dérivées du premier ordre également continues, pour les valeurs (28) de μ et pour x quelconque dans l'intervalle $(x_0, x_0 + l)$. D'après le théorème fondamental de Cauchy, ces solutions sont donc bien des fonctions analytiques de μ holomorphes sous les conditions énoncées ci-dessus.

Citons enfin le théorème suivant, qui se déduit immédiatement des résultats des n^os^ **4** et **8** et qui, d'ailleurs, est une conséquence du théorème qui précède :

Étant donné un système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_i}{dx} = F_{i0}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + y_1 F_{i1}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + \ldots + y_n F_{in}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

dépendant des paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_p$; *si les coefficients* F *sont des fonctions continues de* x *et des fonctions analytiques holomorphes de* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *pour les valeurs réelles de* x *et les valeurs réelles ou complexes de* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *comprises dans certains domaines, il en est de même des solutions de ces équations qui, pour une valeur* x *dans l'intervalle fixé pour cette variable, prennent des valeurs constantes quelconques.*

En énonçant les théorèmes qui précèdent, nous avons constamment supposé la variable x réelle; mais il est évident que, dans le cas où les seconds membres des équations proposées sont analytiques en x, nous pourrons aussi bien attribuer à cette variable une suite continue de valeurs complexes.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME VI.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction*.)

Pages.

[R6b] Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique; par M. *Paul Appell* 5

[H6b] Sur les équations aux dérivées partielles; par M. *H. Duport*, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon 41

[H10d] Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques; par M. *S. Zaremba* 47

[B2] Sur une extension du calcul des substitutions linéaires; par M. *Cyparissos Stéphanos* 73

[H10c] Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé; par M. *Émile Picard* 129

[B4c] Les invariants des formes binaires; par M. *Gordan* 141

[A4] Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati; par M. *Léon Autonne* 157

[S2c] Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch; par M. *P. Duhem* 215

[I19c] Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers; par M. *Edmond Maillet* 261

Pages

[G4b] Sur les fonctions abéliennes singulières (deuxième Mémoire); par M. *G. Humbert* 379

[H9] Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivés partielles; par M. *J. Le Roux* 378

[H1a] Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles; par M. *Ernst Lindelöf* 443

FIN DU TOME VI DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

BINDING SECT. AUG 28 1967

QA
1
J684
sér.5
t.6

Journal de mathématiques
pures et appliquées

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY